

まえがき

天文学者と解析力学

“天文学者の視点”という書名から天体力学の教科書を連想される方もおられるであろうが、この教科書は初学者を対象とした解析力学の入門書である。では、なぜ書名で天文学者の視点であることを明示したのだろうか。そもそも天文学者の定義はなんだろうか？ 先日、自称哲学者の男が道路交通法違反で逮捕されたというニュースに触れる機会があった。仮に筆者がニュースで取り上げられる機会があった場合は、おそらく大学准教授という肩書きで紹介され、天文学者と呼ばれることはないだろう。筆者自身、海外渡航時に入国管理官に職業を聞かれたとき、大学就職後は大学の教員と答えており、天文学者と答えていたのはポストクの間だけである。これもいまから振り返ると入国管理官には“自称天文学者”と捉えられていたかもしれない、何事もなく通過できたのは運がよかっただけかもしれない。それでも書名に天文学者の視点と入れることにこだわったのは、長年天文学の研究・教育に携わってきた者の視点で書いた解析力学の教科書であることを表に出したかったからである。すなわち、ここでの天文学者の定義は、長年天文学の研究・教育に携わってきた研究者である。

天文学の研究・教育に携わってきた研究者による解析力学の教科書は、筆者が知る限り国内では須藤靖氏の『解析力学・量子論』（東京大学出版会）[8]があるのみである。ただこの教科書は、天文学者の独自の視点が出ていているというよりも、須藤氏の個性と独自の視点で書かれている良書である。その意味でも、本書は類を見ない視点で書かれた教科書と言ってよいだろう。

解析力学の創始者であるハミルトンは、光学への数学的手法の応用で大きな功績を残しており、数学者、物理学者であるとともに天文学者でもある。したがって、そもそも解析力学は天文学者によって創設された分野とも言えるだろう。また、天文学者にとって解析力学は、天体現象の解析や観測に用いる光学機器の設計において有益なツールである。実際の天体現象の解析にどのように

ii まえがき

応用されているのか具体的に示せることが、天文学者が書くことの長所の1つであろう。そのような事例をいくつかの項目で示した。例えばフェルマーの原理は、光路長が最短になる経路だけではなく、停留値をとる全ての経路が光の経路として実現されると多くの教科書で記載されているが、具体例を記載した例がない。天文学では、重力レンズ効果により重力源となる天体の背景にある同一の天体の像が複数観測されることが知られているが、これこそがフェルマーの原理が光路長停留値の原理であることの実証例である。重力レンズ現象の記述には、一般相対論のある程度の理解が必要であるが、本書では、一般相対論の素養がなくても理解できる範囲で詳しく解説した。

3.10 節で紹介するビリアル定理は、第二次世界大戦前夜に人類がはじめて暗黒物質の存在を突き止めたときに用いられた定理であり、現在も天体の物質構成の研究に広く用いられている。銀河の密度分布の進化や磁場中のプラズマの運動など非線型性が強く現れている系の記述には、4.1 節で紹介する断熱不変量が絶大な威力を発揮する。B.7 節で示した、エテンデウの保存は、3.9 節で示したリュウビルの定理を光学に応用することで導かれる光学機器の設計に欠かせない定理である。証明の過程で用いる、光の伝搬が正準運動方程式で書けることの解説は既存の教科書では十分になされていない。例えば、L. D. ランダウ、E. M. リフシッツ著『場の古典論』（東京図書）[13] では、詳細な導出過程なしではほぼ天下り的に与えられている。本書では詳細な導出過程を A.4 節で示した。

天文学者の視点によるラグランジュ形式入門

既に星の数ほど国内外で解析力学の教科書が出版されている中で、天文学者が新たな教科書を出版することは、慣例に従った記述をするのではなく、一天文学者のフィルターを通して整理し直した解析力学の理解の仕方を提供できる点でも、意義があるものと考えている。

一般に認識されている解析力学を教授する意義は、量子力学や場の量子論を学ぶために必須の道具だからというものだと思う。例えば、高橋康氏の解析力学の名著 [7] は、明示的にこのことを意識して書かれている。須藤氏の教科書 [8] が、解析力学と量子論がセットになって書かれているのもこのことを意識して

のものと想像する。本書ではもう一步踏み込んで、量子力学の基本原則である“全てのものには物質と波動の二重性が内在している”という考えを前提に解析力学の理論体系を組み上げることを試みる。解析力学は、量子論の登場よりも100年も前に創設された理論体系なので、このような姿勢は受け入れ難く感じる読者もおられるだろう。しかし、本書の4.6節でも示すように、解析力学の基本方程式の1つであるハミルトン-ヤコビ方程式は、有限の質量を持つ光速に比べて十分ゆっくり運動する粒子の量子論的波動性を記述するシュレーディンガー方程式において、プランク定数をゼロに近づけた極限での解の位相が満たす方程式であることは、量子力学創設当初からよく知られた事実である。これは、量子論が解析力学で記述される古典力学の世界を内包していることの1つの証左である。本書では、物質の波動性からの帰結で導出された原理は、波動性が無視できる古典力学極限（すなわちプランク定数をゼロに近づけた極限）でも適用可能であるという立場をとる。言い換えると、物質の粒子性だけに着目すると天下りの受け入れざるを得ない原理（最小作用の原理など）に、物質の波動性からの帰結であるとして、なぜそうなるべきなのか理解を与える。

本書では、光の波動性に基づいた原理であるホイヘンスの原理と、光線の進行方向を決定するフェルマー原理の間の密接な関係を解説することから始める。量子論が創設される以前には、光が現代では光子と呼ばれる粒子の集合体であるという概念はなかったが、光線という概念は存在した。光の波動性が現れる現象は回折や干渉である。光を光線として扱う近似を幾何光学近似と呼ぶ。幾何光学近似が成り立つのは、光が伝搬する媒質の物理量の変化が現れるスケールが光の波長に比べて十分長い極限である。幾何光学近似のもとでは、光の波としての性質は無視でき、始点から終点を結ぶ最短経路（光路長が停留値をとる経路）を進む光線として扱われる。4.5節で議論するように、光の伝搬はマクスウェル方程式から導出される波動方程式により記述されるが、幾何光学近似のもとで、この方程式は光の位相が満たすアイコナール方程式に還元される。幾何光学近似が成り立つ極限が、前述したプランク定数をゼロに近づけた極限でシュレーディンガー方程式から古典力学に移行することに対応している。1.3節で議論するフェルマーの原理は、幾何光学近似のもとで光の伝搬を光線の伝搬とみなし、指定された始点と終点を光線が通る経路を導く原理である。量子

iv まえがき

論によれば、光線は同一方向に進む光子の集合とみなされる。したがって、フェルマーの原理は、光子一個一個が辿る古典的経路を与える原理とみなすことができる。ここで古典的経路とは、量子的揺らぎを伴わない明確に定義できる経路のことを指す。一方、1.3.2 項で議論するようにフェルマーの原理は、光の波動性に基づいた原理であるホイヘンスの原理から導出できる。言い換えると、光が波動であることに立ち返ることで、フェルマーの原理がなぜ成り立つのか理解が与えられるのである。このことが、上の段落で述べた、本書がとる立場の正当性を裏付ける根拠の1つである。

本書がとる立場は、定量的には“粒子の作用積分をプランク定数で割り 2π を掛けたものは、その粒子を物質波とみなしたとき、その波が始点から終点まで伝搬する間の位相変化量に等しい”と表現できる。B.3 節で紹介するアハラノフ-ボーム効果の実験による実証は、この前提が正しいことの実験的検証である。明確な回答を筆者は依然として持ち合わせていないが、筆者が大学院を受験したときの面接で受けた「座標とそれに共役な正準運動量のポアソン括弧式は1になるが、それは量子力学における位置と共役な運動量の交換関係式とプランク定数分の違いを除いてよく似ている。それは偶然か？それとも必然的理由があると思うか？」という問いも、量子論の出現以前に創設された解析力学に実は量子論の存在を内包していたことを示唆している。

多くの解析力学の教科書では、A.1 節で解説した、ダランベールの原理から帰納的にオイラー-ラグランジュ方程式を導出するところから解説を始めている。本書では、そのやり方はあくまで付録として位置付け、本論では触れない。通常の教科書でダランベールの原理を用いた、いわば帰納的方法でのオイラー-ラグランジュ方程式の導出から始めているのは、この説明がないと、なぜラグランジアンが(運動エネルギー) - (ポテンシャルエネルギー) の形になるのか、なぜ最小作用の原理から運動方程式が導かれるのかについて、天下りの与えざるを得ないからだと思われる。本書では、粒子が波動的性質を併せ持つという前提を採用することで、上記の帰納的方法に頼ることなくラグランジアンの導出を試みる。

宇宙に秘められた美しさを顕在化する解析力学

色々書いてきたが、筆者が解析力学を魅力的に感じる主な理由は、その理論体系の美しさと全く新しいものの見方を与えてくれることである。特に、系の対称性と保存則についての議論は、高橋康氏の『量子力学を学ぶための解析力学入門』（講談社）[7]で筆者がはじめて解析力学を学んだとき、学んだことを今すぐ誰かに伝えたいという強い衝動に駆られるほど感銘を受けた。学んでからしばらくの間、当時住み込みで新聞配達していた宿舎で、同年代の同僚の迷惑そうな様子にお構いなしに熱弁をふるったり、毎朝じゃれ合うのが習慣になっていた配達先のアパートの飼い犬に対称性の重要性を教えるために両前足でのお手を仕込んだりしていた。そういった経験もあり、このたび物理の学習に意欲を燃やす方々を対象に教科書という形で伝える機会が与えられたことは望外の喜びである。対称性と保存則の強い結びつきを明らかにする理論は、宇宙に秘められた美しさを私たちの目の前に顕在化してくれる。その美を味わうことができるのは解析力学を学ぶ者のみの特権である。とにかく味わい深い学問なので、十分堪能してほしいと思う。

2025 年 2 月

服部 誠

目 次

第 1 章 変分原理	1
1.1 オイラーの微分方程式	2
1.1.1 適用例：直線	4
1.1.2 適用例：最速降下線	6
1.2 ラグランジュの未定乗数法	8
1.3 フェルマーの原理	12
1.3.1 波の位相：アイコナール	13
1.3.2 ホイヘンスの原理からのフェルマーの原理の導出	17
1.3.3 光の波動性に基づいたフェルマーの原理の定量的理解	19
1.3.4 フェルマーの原理：重力レンズ効果	24
1.3.5 なぜ光は与えられたゴールに向かって自らの進むべき道を ゴール到達前に知っているのか	27
1.4 モーペルテュイの原理	28
1.4.1 モーペルテュイの原理	28
1.4.2 自由粒子の運動への応用	29
1.4.3 保存力場中を運動する粒子への応用	30
1.5 ラグランジュ関数	35
1.5.1 光の位相変化量のガリレイ変換に対する不変性	36
1.5.2 ラグランジアンを導入	39
1.6 位相空間	40
1.7 オイラー-ラグランジュ方程式	43
1.7.1 オイラー-ラグランジュ方程式	43

viii 目 次

1.7.2	ラグランジアンのカリレイ変換に対する変換性	46
1.7.3	ラグランジュ形式の非慣性系への拡張	48
1.7.4	まとめ	56
1.8	拘束条件がある系のラグランジュ形式	56
1.8.1	坂を転がり落ちる車輪	57
1.8.2	拘束条件がある系の運動の扱い	59
付録A		61
A.1	オイラー-ラグランジュ方程式の運動方程式からの導出	61
A.1.1	単純な場合	61
A.1.2	拘束条件のもとで運動する質点	62
A.2	光の回折と観測の不確定性関係	66
A.2.1	スリットを透過する光の回折	66
A.2.2	回折限界	70
A.2.3	観測の不確定性関係	71
A.2.4	物質の二重性	73
A.3	粒子の速度が光速に近いときの自由粒子の ラグランジアン	74
A.4	波動の基礎	75
A.4.1	格子を伝わる振動：位相速度	76
A.4.2	群速度	82
A.4.3	ダランベールの方程式	85
A.4.4	ナイキストのサンプリング定理・エイリアシング	89
A.5	物質波のモデルとしての連成振り子	90
第2章	系の対称性と保存量	93
2.1	系の対称性と保存量	93

2.1.1	時間推進対称性：エネルギー	93
2.1.2	空間推進対称性：運動量	94
2.1.3	座標回転対称性：角運動量	96
2.2	循環座標	100
2.3	ネーターの定理	104
第 3 章	正準形式	113
3.1	ルジャンドル変換	113
3.2	正準形式	115
3.3	正準変換と母関数	118
3.3.1	ラグランジアンの変換の不定性	118
3.3.2	正準変換と変換の母関数	122
3.3.3	正準変換を用いた運動の解析の例	125
3.3.4	母関数の変数選択の自由度	126
3.3.5	恒等変換	127
3.3.6	無限小変換	128
3.4	ポアソン括弧式	129
3.5	系の対称性と無限小変換の母関数の保存	130
3.6	正準変換としての正準運動方程式	134
3.7	非慣性系の正準形式	136
3.8	電磁場中の荷電粒子の運動を記述する正準形式	138
3.9	リウヴィルの定理	141
3.10	ビリアル定理	143
3.10.1	自己重力平衡系	143
3.10.2	調和振動子	147
3.10.3	一般の保存力場	149

x 目 次

付録 B 152

B.1 ルジャンドル変換の応用例：強磁性転移	152
B.1.1 ランダウの理論	152
B.1.2 強磁性転移の微視的理解	157
B.2 電磁場ポテンシャルのゲージ変換自由度	158
B.3 アハラノフ-ボーム効果	159
B.4 非圧縮性流体	164
B.5 3次元空間を運動する粒子系のリウヴィルの定理の証明	168
B.6 無衝突ボルツマン方程式	170
B.7 リウヴィルの定理の幾何光学への応用：	
エテンデウの保存	171
B.7.1 光線の正準運動方程式	171
B.7.2 エテンデウの保存	175

第 4 章 断熱不変量およびハミルトン-ヤコビ理論 177

4.1 断熱不変量	177
4.1.1 作用変数・断熱不変量	177
4.1.2 粒子が閉じ込められた容器の体積の断熱変化	178
4.1.3 単振り子	182
4.1.4 磁気ミラー効果	185
4.1.5 摂動論を用いた強度がユックリ変動する 一様磁場中の荷電粒子の運動の解析	191
4.1.6 一般的な系に対する作用変数の断熱不変性の証明	195
4.2 作用変数と運動の周期	197
4.3 前期量子論で作用変数が活躍した理由	198

4.4	ケプラー運動の作用変数を用いた解析	198
4.4.1	ケプラーの第3法則	198
4.4.2	ポテンシャルの断熱変化と長軸短軸比の保存	204
4.5	アイコナール方程式	206
4.6	ハミルトン-ヤコビ方程式	207
4.7	ハミルトン-ヤコビ方程式とラグランジュ形式の関係	209
4.8	シュレーディンガー方程式とハミルトン-ヤコビ方程式	211
4.9	ハミルトンの特性関数	212
4.10	作用変数と角変数	215
付録 C		218
C.1	ポアンカレの積分不変式	218
C.1.1	絶対積分不変式	218
C.1.2	ポアンカレの相対積分不変式の定理	219
C.2	アイコナール方程式の導出	233
参考文献		237
索引		239