

まえがき

「クジラのような大きな鳥はなぜいないのか？」

「ジャックが登った豆の木のように天まで届く木はなぜいないのか？」

どちらも直観的にはあり得ないことはわかるのですが、どうやってそれを「証明」したらよいのでしょうか。その直観は、重いものが飛べるはずがない、木が折れ曲がらないでどこまでもまっすぐに伸びるはずがない、といったところでしょうか。

重さや折れ曲がる強度といったものは、量に関係しています。長さ、重さ、時間、温度など、我々はさまざまな量に囲まれています。現象に現れる量の関係を偏微分方程式や常微分方程式にモデル化して解を求めることは、数学の一つの方法です。しかし「次元解析」を使えば、量の関係を解析するだけで、方程式を数学的に解かずに(!) 現象の理解に必要となる一般的な解を求めることができます。冒頭のあり得ないであろうことのような、そもそもモデル化することが難しそうな問題に対しても、次元解析を使えば、その証明といってよい推論を展開することもできます。

次元解析は通常、数学のどの分野においても学ぶことはありません。筆者が次元解析を知ったのは、十数年前に流体力学の専門家から「バッキンガムのパイ定理って知っていますか？」と言われたときでした。流体、航空、機械、建築、燃焼などの物理、化学、工学

の分野において次元解析の考え方は重要で、次元解析という名の下に計算をしていなくても、さまざまな実験の計測を通して、日常的に単位（量）の計算や変換がなされています。さらにここ数年、燃焼の専門家と共同研究をするにつれ、次元解析の考え方の有効性と即効性をまざまざと実感することになり、ますます次元解析に親しみを覚えてきました。例えば、森林火災のシミュレーションをするのに、実際に山火事をおこすわけにはいきません。ビル風のシミュレーションをするのに、ビルの谷間で日がな一日風を待つわけにもいきません。研究は進まないし、そもそも状況設定を自在に変えられません。そこで、山火事やビル風を模した小さな模型で実験をすることになります。ところが、森林やビルの10分の1のミニチュアを作って、火をつけて、扇風機で風を送っても、実際の現象の10分の1のミニチュア版ができるわけではありません。すべての現象を10分の1にすることはできないからです。逆に拡大することを考えても同じです。体長1 mm程度のノミは体長の100倍の10 cmほどジャンプするといいます。だから、もしノミが人間くらい大きさだったら、高層ビルの高さ並みにジャンプできるに違いない、というファンタスティックな意見がありますが、本当でしょうか。

先述の「パイ定理」は次元解析の理論的基礎となる定理です（バッキンガムはその定理が載った論文の著者の名前）。例えば、円周率 π は円周と直径の比の値で、それは大きい円でも小さい円でも変わらない不変な量です。円周の長さ L と直径の長さ d の比の値なので、長さの次元が消えて、無次元量となります。長さ、重さ、時間など、いくつかの量からある量が定まっているとき、無次元量がいくつ作られるのかについて明解に答えた定理がパイ定理です。流体力学ではレイノルズ数という無次元量が流体の様子を表す重要な因子です。紛らわしい例をだしてしまいましたが、パイ定理のパイは円周率の π とは無関係です。

本書は、次元の考え方と次元解析の手法の流れをまとめた第0章と、第I部基礎編（第1章～第4章）、第II部実践編（第5章～第7章）の2部、全8章からなります。

第1章で量、単位、次元とは何かを考えます。第2章はパイ定理も含めた次元解析の理論的基礎、第3章では、「車はなぜ急に止まれないのか」を例にとって、データ解析、次元解析、漸化式、運動方程式を用いた解析の4つの方法を比較しながら考察し、次元解析の立ち位置を俯瞰します。第4章は次元解析に関連したトピックを中心とした小史です。次元解析はフーリエから始まったというのは一つの見方でしょう。フーリエ以後、ハミルトンによるスカラーとベクトルの概念、マクスウェルによる次元の記号の導入、レイリー卿によるレイリー・アルゴリズム（次元の指数決定法）などを経て現代的な次元解析へと発展しました。一方、フーリエ以前にも次元解析への布石はいくつも敷かれていました。とりわけ大きな石はガリレイ、デカルト、ニュートンによるものです。現代数学では、方程式に単位を添えて記述することはほとんどありませんが、方程式から単位という概念を消したのはデカルトからです。デカルト以前には、例えば $x^2 + x^3$ は一辺の長さ x の正方形の面積と、一辺の長さ x の立方体の体積を足すようなもので、ナンセンスな計算であると思われていました。デカルトはこの考え一縛り一を打破しました。また、ガリレイは、力学的な釣り合いと相似に関して深く洞察しました。ガリレイによる科学的考察の蓄積のもと、ニュートンが古典力学の花を咲かせました。質量と速度を掛けて運動量とし、運動量の時間変化を力と定義したことは、次元の異なる量の積や商によって新しい量を作り出したこととなります。

以上四つの章が第I部基礎編です。

以降は第II部実践編です。第5章は数学寄りの話題です。次元解析の本に必ず記載されている振り子の周期の例と、次元解析では求まらない無次元量の値を実験や理論から求める手法、さらに、数

学的な微分や全微分の話と相対誤差を見積もる方法について述べます。第6章は物理寄りの話題です。前半は流体の粘性についての基礎事項と応用例、後半は紙で作った円錐の落下実験を例に、落下速度を決定する要因を探り、最後は夏目漱石の俳句の実証実験を提案します。最終第7章は生物寄りの話題です。動物や植物などの大きさに何か法則はあるのかどうかについて、次元解析から考察します。冒頭の問いかけや上述したノミを巨大化させたときの運動能力についても第7章で答えます。

次元解析的手法を自在に操る人たちと話すと、「自然現象の7割、いやほとんどは次元解析で説明がつく」と言います。次元解析は解析といっても指数の四則演算をするだけです。にもかかわらず、計算の簡単さに反して得られる情報は大きいし、スケーリングや自己相似性などの偏微分方程式への応用も多く、興味深い分野です。こんな面白い分野なのにまとまった書物があまりありません。実際、参考文献(219ページ)で紹介するように、次元解析のことを書いた本は10冊程度(うち、和書は4冊)、一部の章だけ次元解析を扱っている本や次元解析に関する論説を合わせても20冊程度で、その大半が物理学や工学の本です。それゆえに、次元解析を主眼とした数学の本で、抽象的な数式に対して、計測的視点を養い、実用的姿勢を誘う趣旨の本があっても良いだろうと思ひ執筆を考えました。素朴には、「こんなに魅力的で、簡単な方法を大学生のときに知りたかった、いや高校生のときに知りたかった、だから皆さんにも知ってほしい!」という紹介したがり節介魂の赴くままに、次元解析と銘打った1冊を「数学のかんどころ」シリーズに加えてさせてほしいと編集委員の飯高茂先生に申し出たのが本書の始まりです。毎年ご一緒している某高校の数学イベント Xmath でお話ししたのがきっかけでした。執筆の機会をくださった飯高先生をはじめ編集委員の先生方に感謝申し上げます。その始まりの GO サインが出た旨の連絡を共立出版編集部の大谷早

紀氏からいただいたのは2020年3月、同日にシリーズの編集担当の三浦拓馬氏から正式に出版に向けた決定の連絡をいただき、そして、とんとん拍子に執筆が進む…、はずだった。というくぐりや前拙著 [115] の序文と同じなので（またか！）以下省略。辛抱強くお待ちいただいた編集部のお二人には御礼申し上げます。

本書を上梓する前に、多くの方々が草稿に目を通して下さいました。上述した燃焼の専門家である桑名一徳氏（東京理科大学）には、重要な参考文献の紹介や実用的観点からの次元解析の方法など、多くの本質的な指摘を賜りました。また、明治大学理工学研究科数学専攻の市田優（JSPS 特別研究員）、下地優作、同OBの飯島ひろみ、加茂章太郎、舘野周一、宗像俊行、山根匡史の諸氏、および秋田健一氏（TDSE 株式会社）、榊原航也氏（岡山理科大学／理化学研究所）には、次元解析に初めて触れた読者の観点から、「数学のかんどころ」シリーズの1冊として手に取った読者の視点から、現役の高校数学教員の立場から、あるいは高校生や大学生の気持ちを想像しながら、原稿を吟味、校正し、軽微な誤植はもとより、深く鋭い論点を数多く指摘して下さいました。みなさまに深謝いたします。

本書を手にとってくれた読者のみなさんが、本書を契機に、単位が書いていない数式や自然現象、社会現象などを見る目が変わり、数式や現象の理解が進めば望外の喜びです。

2022年4月 矢崎成俊

目 次

まえがき v

第 0 章 次元と次元解析の考え方	1
0.1 次元とは何か 2	
0.2 次元のべきの競争—クジラのように大きい鳥が いないのはなぜか 6	
0.3 次元解析の簡単な導入—落下距離が時間の 2 乗 に比例する理由 10	
0.4 ピタゴラスの定理 18	
0.5 素朴な疑問 23	
第 I 部 基礎編	
第 1 章 量, 単位, 次元	27
1.1 量と単位 28	
1.2 単位の変換 30	
1.3 次元と国際単位系 (SI) 35	
1.4 一貫性のある SI 組立単位 38	
1.5 SI 基本単位の定義 42	
第 2 章 次元解析の理論的基礎	51
2.1 次元再説 52	

2.2	次元はべき乗の単項式	54
2.3	独立した次元を持つ量の組	64
2.4	支配量	71
2.5	Π 定理	75
2.6	極限と次元	86
2.7	面積や体積の単位と次元	93
第3章	次元解析と他の解析の比較：車は急に止まれない	97
3.1	停止距離	98
3.2	データの近似解析	100
3.3	次元解析	103
3.4	漸化式（運動方程式 (0.4)）による解析	108
3.5	運動方程式 (0.8) による解析	110
第4章	次元解析の発展に寄与した主たる人物たち	113
4.1	フーリエの要請以前と以後	114
4.2	ヴィエートによる方程式の解法	117
4.3	デカルトの表記法	121
4.4	四元数とベクトル	125
4.5	ベクトル量の次元解析	130
第II部	実践編	
第5章	振り子の運動と相対誤差	143
5.1	振り子の周期	144
5.2	相対誤差	147
5.3	運動方程式から周期の理論値を求める	154
5.4	張力を考慮した次元解析	157

第 6 章 物体の周りの流れと物体の落下	159
6.1 流体の粘性	160
6.2 円錐の落下実験	176
第 7 章 動植物の大きさの法則	187
7.1 クライバーの $\frac{3}{4}$ 乗則	188
7.2 ロバート・フックのアナグラムと棒のたわみ	194
7.3 ガリレオの骨とマクマホンの弾性相似モデル	201
問題の解答例	207
参考文献	219
索引	230