プロローグ

筆者の研究の原点でもある極小曲面論の本が書けるということは大変名誉なことであると同時に，重い責任を感じることでもありました．思えばR. Ossermanの教科書 [90] が筆者の修士課程の出発点で，同じ本を比較的最近，院生に読ませていたことを考えると，Osserman の本の右に出る書物は古今東西，数十年にわたり現れなかったと言っても過言ではないかもしれません．

もちろん Colding-Minicozzi [23] や，Y. L. Xin [111] らが魅力的な関連書を書き，また，古くは J. Nitsche [86] の辞書かと見紛う良書もあったわけですが，やはり原点は Osserman ではないかと思い，本書もかなりの導入部を Osserman 流に書きました．

Osserman は関数論の専門家らしいアプローチで極小曲面論を述べていますが，他方，Colding-Minicozzi は幾何解析的な立場を貫き，より広範な極小部分多様体論を扱っています．そこで本書では双方のよいところを取り入れることにより，その立ち位置の違いから読者層も広がってくれればと願いながら書いています．

極小曲面は等温座標により正則データを用いて表されることから，一部に代数曲線論がその本質と誤解されることがありますが，これがまったく通用しないことが，本書から伝われば幸いです．また，楕円型偏微分方程式の解のみたす最大値原理や解析性は極小曲面論に多くの情報を与える反面，極小グラフ方程式の非線形性から生じるまったく思いがけない性質も Osserman の言葉を借りれば “striking” です．代表的なものは Bernstein の定理でしょう．

本書には，現代幾何学の立場からは実にまどろっこしい記述もあるかもしれませんが，Osserman を読み直していて，実は常識と考えられている種々の現象が，本当に証明しようとすると，こうした地道な考察を経ていることが再認識され，これを省くわけにはいかないと感じました．

Colding-Minicozzi の書籍は，誠に現代的に Riemann 多様体の一般次元極小部分多様体を扱い，その幅広い応用に至るまで，重要な議論と結論が記載され

ています．したがってこれらにも触れないわけにはいかず，第 V 部では詳細には至らずとも，現代極小部分多様体論のフレーバーが少しは味わえるよう，その内容を可能な限り記述しました．

またどうしても書きたかったのは Plateau 問題の解の存在とレギュラリティです．これについての解説は他の書物にはあまり見られないからです．完全とは言えませんが，Osserman，Gulliver らによる古典論と，測度論を用いる現代論の両方に触れています．

他方，第 13 章の代数的極小曲面の構成では，様々な Riemann 面が極小曲面によって実現され，その可視化が双方の理解を深めます．その過程においては，留数計算や，Weierstrass の $\wp$ 関数の計算にも習熟できます．

極小曲面の歴史は 1762 年の Lagrange のメモワール “Essai d’une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules int’egrales indéfinies” にまでさかのぼれます．Euler は 1744 年出版の論文で既に現在カテノイドとして知られている面積最小曲面の性質を論じましたが，一般論には至りませんでした．19 世紀の前半には，ベルギーの物理学者でストロボスコープなどの発明家 J. Plateau が石鹸膜とシャボン玉，表面張力の研究を熱心に行い，石鹸膜の数学モデルが極小曲面であること，つまり変分問題の解であることの認識がなされました．解の存在を問う Plateau 問題（本書第 2, 7 章参照）を解いた J. Douglas（T. Radó も独立に解決）は，1936 年に第 1 回の Fields 賞を受賞しています．

極小曲面方程式は多くの物理問題の数学モデルとなっています．他分野に及ぼす影響は計り知れず，近年では Poincaré 予想の証明に使われたり，正質量定理に現れたりしています．また Calabi-Yau 多様体論においてはスペシャルラグランジュ部分多様体という体積最小部分多様体が論じられ，曲面のみならず，部分多様体としての重要性も認識されています．Plateau 問題は，Sacks-Uhlenbeck の調和写像の存在問題の議論に発展し，さらには種々のモデュライ空間の議論へと展開していくことになりました．また，平均曲率流による面積勾配流理論などの放物型問題にも発展しており，極小曲面論が幾何学の源流の一つをなしていることがわかります．

本書は大学専門課程以上の読者を対象としていますが，前半は多くの知識がなくても理解可能な書き方を心がけました．第 16 章以降は少々専門的な議論もありますが，今後の研究の展開につながるよう，意識して書きました．極小曲面論は，球面内や，双曲空間内，より広く一般の Riemann 多様体の中でも豊富な研究があり，それぞれ 1 冊の本が書けるくらいです．しかし本書では Euclid 空間内に議論を絞ることにより，基本を身に付けていただくことを目標としました．ここでの議論を理解しておけば，外側の空間が変わったときに何をすればよいかが自ずとわかってくると思います．

第 I 部，第 II 部は基本事項からなりますので，できれば熟読していただきたいと思います．第 III 部は本書のメインターゲットの一つではありますが，初めて学ぶ方は後回しにしてもよいでしょう．第 IV 部は第 14 章までは読んでいただければと思いますが，第 15 章も興味があればお勧めです．第 V 部は知識として知っていることが望ましい内容です．

なお，外国人名はアルファベット表示してありますが，索引は日本語読みの 50 音順になっています．また和文の参考文献は最後にあげてあります．

末筆ながら，國川慶太氏（宇都宮大学）には原稿を読んでいただき，有用なご指摘を受けました．藤森祥一氏（広島大学）にはいつもグラフィックでお世話になっています．石鹸膜の実験の写真掲載は小磯深幸氏（九州大学）に快諾していただきました．また幾何学的測度論の第一人者である利根川吉廣氏（東京工業大学）からは貴重なご教示をいただきました．さらに本書エピローグにあげさせていただきました研究者の方々からは多くのことを学びました．

最初に声をかけていただいた共立出版の赤城 圭氏には，再三のお励ましにもかかわらず，ここまで原稿が遅れてしまいましたことをお詫び申し上げます．その後編集を引き継がれた大越隆道氏には，今回の出版に際しまして様々なご配慮をいただき，心より御礼申し上げる次第です．最後に査読者からは多くの貴重なご指摘をいただき，必要な修正を加えることができました．ここに深く感謝申し上げます．

2021 年盛夏　東京にて　　　宮岡礼子