

## まえがき

本書は、「計算理論」と「数理論理学」を同時に学ぶための学部上級から大学院初年級レベルの教科書あるいは独習書である。

私は数学科の教員として、専門の数理論理学だけでなく、計算機関連の科目も度々担当している。十数年前のこと、講義の準備のためコーゼン (D. C. Kozen) の教科書『計算の理論』[Koz] (2006) を手にとった。この本は、コーネル大学計算機科学科における大学院1年生向けの講義ノートをまとめたものだという。しかし、数学的な計算可能性理論にもかなり踏み込んでいて、ポストの問題、順序数  $\omega_1^{CK}$  と  $\Pi_1^1$  の関係なども取り上げられている。計算機科学科の授業でそこまでやるなら、数学科の授業で計算理論をどこまでやれるだろうかと思ったのがこの始まりであった。両分野を同時に扱うといっても、単に両者の共通項を括り出したり、類似性を強調したりするのではなく、それぞれの違いを違いとして認めながら、両分野の稜線に立って壮大な景色を展望したいと思った。

本書の話題をいくつかあげてみよう。NP問題を論理的に特徴付けるフェイギンの定理 (定理 4.34) は、有限モデル論と計算量理論を結ぶ美しい定理であるが、両方の知識が必要になるので、数理論理学の本でも計算量理論の本でも扱いにくい話題である。また、有限モデル論の技術を応用して証明されるリンドストロムの定理 (定理 3.33) は、20世紀後半における1階論理に関する最も重要な結果の1つだと思うが、説明の準備が大変なためか日本語の教科書ではまだ紹介されたことがないようだ。

計算可能 (再帰的) 関数を自然数上から順序数上へと一般化する試みは前世紀中葉から様々な形で行われてきた。特に、クリプキ [Kri] は集合論の巨大基

数の類似物となる（許容可能）順序数を導入し、それと2階算術の諸体系との関係を議論した。この研究が、その後の2階算術の研究（[Sim] など）にも多大な影響を与えたことは疑いないのだが、なぜかクリプキに近い人たちも2階算術の研究者たちもこの辺りの解説を放置しているようなので、本書では主要な話題の1つとして取り上げた。

もう1つ、本書の中心的な話題は、パリティゲームの無記憶戦略を用いたS2Sの決定性証明であるが、これに関する事情はあとがきに書く。

ここで、本書の構成について簡単に説明しておこう。

第1章「計算理論入門」は、前の方が計算理論の話、後の方が数理理論学の計算可能性理論（再帰理論）の話である。真ん中辺は両者が混じった内容になっている。すべてが以降の章の基礎となるものであるが、定理の主張をある程度理解できていれば、細かい証明は飛ばして読んでも差し支えないだろう。

第2章「命題論理と計算の複雑さ」では、2.1節と2.2節で命題論理（ブール代数）の基本をおさらいし、2.3節から計算量理論に入る。そして、命題論理の充足可能性判定問題SATがNP完全であることと、量化ブール代数の恒真判定TQBFがPSPACE完全であることなどを学ぶ。

第3章「1階論理と決定問題」は、3.1節から3.3節で1階論理の基本をおさらいし、3.4節以降の後半では1階論理の上の算術体系に関する決定性や不完全性定理について学ぶ。1階論理の基本ツールであるエレンフォイト・フライセのゲームやその重要な応用であるリンドストロムの定理などは、是非理解しておきたい。不完全性定理と計算可能性理論との関係については、5.2節のコラムも参照されたい。

第4章「2階論理と無限オートマトン」は、単項2階理論S1Sの決定性を $\omega$ オートマトンを用いて証明するピュッキの方法と、同じくS2Sに対して木オートマトンを用いるラビンの方法を中心に解説する。後者については、ラビン以後も証明の改良が繰り返されており、ここではパリティゲームの無記憶戦略を用いた改良証明を紹介する。

第5章「階層理論と許容集合」では、5.1節から5.3節で計算可能性理論についてポストの問題を中心に学ぶ。5.4節と5.5節は論理式による様々な階層理論を導入し、最後に近藤・アディソンの定理を証明する。5.6節と5.7節は、

KP 集合論と順序数上の計算理論を扱う.

この本には私自身が発見した定理は1つも書かれていないが、本全体がかなり独自の議論展開になっているため、私の理解不足によって不備な点も少なからずあるかと思う。本書がある程度完成の域に到達できているとしたら、それは私の講義やセミナーに参加してくれた学生たちや、私の講義ノートや過去の著作にコメントを下さった多くの方々、そして共立出版の編集者の大越隆道さんと大谷早紀さんのお陰である。皆さん、どうもありがとう。

それでは、読者の皆さん、ロジックと計算の稜線からの素晴らしい眺めをご堪能ください。

令和4年 新緑の仙台にて 田中一之

# 目 次

<b>第 1 章 計算理論入門</b>	<b>1</b>
1.1 オートマトンとモノイド	1
1.2 チューリング機械	9
1.3 計算可能な関数と原始再帰的関数	17
1.4 計算可能性と不可能性	25
1.5 再帰的部分関数と CE 集合	33
1.6 ライスの定理と多対一還元	43
<b>第 2 章 命題論理と計算の複雑さ</b>	<b>50</b>
2.1 トートロジーと証明	51
2.2 命題論理の完全性	56
2.3 NP 完全問題	62
2.4 グラフに関する NP 完全問題	72
2.5 時間限定と領域限定のクラス	78
2.6 階層定理	87
2.7 PSPACE 完全と TQBF	92
<b>第 3 章 1 階論理と決定問題</b>	<b>95</b>
3.1 1 階論理とは	95
3.2 スコーレムの定理	101
3.3 エーレンフォイヒト・フライセのゲーム	112
3.4 プレスバーガー算術の決定可能性	125

viii 目 次

- 3.5 1 階算術と論理式の階層 129
- 3.6 計算可能性理論と第一不完全性定理 134
- 3.7 第二不完全性定理 139

**第 4 章 2 階論理と無限オートマトン** \_\_\_\_\_ 147

- 4.1 2 階論理 148
- 4.2 2 階算術と解析的階層 152
- 4.3 無限列上のオートマトン 159
- 4.4  $\omega$  オートマトンと S1S 167
- 4.5 木オートマトンと S2S 172
- 4.6 有限モデル論 184
- 4.7 パリティゲームの無記憶決定性 190

**第 5 章 階層理論と許容集合** \_\_\_\_\_ 195

- 5.1 オラクル計算と相対化 195
- 5.2  $m$  還元と単純集合 201
- 5.3  $T$  還元とポストの問題 206
- 5.4 算術的階層と多項式時間階層 212
- 5.5 解析的階層と記述集合論 217
- 5.6 クリプキ・プラテックの集合論 230
- 5.7  $\alpha$  再帰理論と再帰的巨大順序数 244

文献案内 261

問題解答 267

あとがき 283

用語索引 285

記号索引 297