まえがき

本書は，「計算理論」と「数理論理学」を同時に学ぶための学部上級から大学院初年級レベルの教科書あるいは独習書である．

私は数学科の教員として，専門の数理論理学だけでなく，計算機関連の科目も度々担当している．十数年前のこと，講義の準備のためコーゼン (D. C. Kozen) の教科書『計算の理論』[Koz] (2006) を手にとった．この本は，コーネル大学計算機科学科における大学院 1 年生向けの講義ノートをまとめたものだという．しかし，数学的な計算可能性理論にもかなり踏み込んでいて，ポストの問題，順序数 ω_1^{CK} と Π_1^1 の関係なども取り上げられている．計算機科学科の授業でそこまでやるなら，数学科の授業で計算理論をどこまでやれるだろうかと思ったのがことの始まりであった．両分野を同時に扱うといっても，単に両者の共通項を括り出したり，類似性を強調したりするのではなく，それぞれの違いを違いとして認めながら，両分野の稜線に立って壮大な景色を展望したいと思った．

本書の話題をいくつかあげてみよう．NP 問題を論理的に特徴付けるフェイギンの定理（定理 4.34）は，有限モデル論と計算量理論を結ぶ美しい定理であるが，両方の知識が必要になるので，数理論理学の本でも計算量理論の本でも扱いにくい話題である．また，有限モデル論の技術を応用して証明されるリンドストロムの定理（定理 3.33）は，20 世紀後半における 1 階論理に関する最も重要な結果の 1 つだと思うが，説明の準備が大変なためか日本語の教科書ではまだ紹介されたことがないようだ．

計算可能（再帰的）関数を自然数上から順序数上へと一般化する試みは前世紀中葉から様々な形で行われてきた．特に，クリプキ [Kri] は集合論の巨大基

数の類似物となる（許容可能）順序数を導入し，それと 2 階算術の諸体系との関係を議論した．この研究が，その後の 2 階算術の研究（[Sim] など）にも多大な影響を与えたことは疑いないのだが，なぜかクリプキに近い人たちも 2 階算術の研究者たちもこの辺りの解説を放置しているようなので，本書では主要な話題の 1 つとして取り上げた．

もう 1 つ，本書の中心的な話題は，パリティゲームの無記憶戦略を用いた S2S の決定性証明であるが，これに関する事情はあとがきに書く．

ここで，本書の構成について簡単に説明しておこう．

第 1 章「計算理論入門」は，前の方が計算理論の話，後の方が数理論理学の計算可能性理論（再帰理論）の話である．真ん中辺は両者が混じった内容になっている．すべてが以降の章の基礎となるものであるが，定理の主張をある程度理解できていれば，細かい証明は飛ばして読んでも差し支えないだろう．

第 2 章「命題論理と計算の複雑さ」では，2.1 節と 2.2 節で命題論理（ブール代数）の基本をおさらいし，2.3 節から計算量理論に入る．そして，命題論理の充足可能性判定問題 SAT が NP 完全であることと，量化ブール代数の恒真判定 TQBF が PSPASCE 完全であることなどを学ぶ．

第 3 章「1 階論理と決定問題」は，3.1 節から 3.3 節で 1 階論理の基本をおさらいし，3.4 節以降の後半では 1 階論理の上の算術体系に関する決定性や不完全性定理について学ぶ．1 階論理の基本ツールであるエーレンフォイヒト・フライセのゲームやその重要な応用であるリンドストロムの定理などは，是非理解しておきたい．不完全性定理と計算可能性理論との関係については，5.2 節のコラムも参照されたい．

第 4 章「2 階論理と無限オートマトン」は，単項 2 階理論 S1S の決定性を ω オートマトンを用いて証明するビュッキの方法と，同じく S2S に対して木オートマトンを用いるラビンの方法を中心に解説する．後者については，ラビン以後も証明の改良が繰り返されており，ここではパリティゲームの無記憶戦略を用いた改良証明を紹介する．

第 5 章「階層理論と許容集合」では，5.1 節から 5.3 節で計算可能性理論についてポストの問題を中心に学ぶ．5.4 節と 5.5 節は論理式による様々な階層理論を導入し，最後に近藤・アディソンの定理を証明する．5.6 節と 5.7 節は，

KP 集合論と順序数上の計算理論を扱う.

この本には私自身が発見した定理は１つも書かれていないが，本全体がかなり独自の議論展開になっているため，私の理解不足によって不備な点も少なからずあるかと思う．本書がある程度完成の域に到達できているとしたら，それは私の講義やセミナーに参加してくれた学生たちや，私の講義ノートや過去の著作にコメントを下さった多くの方々，そして共立出版の編集者の大越隆道さんと大谷早紀さんのお陰である．皆さん，どうもありがとう.

それでは，読者の皆さん，ロジックと計算の稜線からの素晴らしい眺めをご堪能ください.

令和４年　新緑の仙台にて　　　田中一之

目　次