

まえがき

次々と釘にはじかれながらパチンコ台の中を不規則に落ちていく玉たち。パチンコ台の出口をせき止めると、理論上、それらはいつも同じ美しい山の形に積み上がります。

この混沌から秩序が生まれる不思議な現象をもっとよく理解したい。この現象を表現する機器を自分で作ることができれば、その仕組みを理解する助けになるかもしれない。この現象を具現化すれば多くの人が数学に触れたり、数学を感じたりする機会になるかもしれない。この趣旨に賛同した北海道大学と札幌周辺の高校の数学の教員、学生が集まり、一風変わった勉強会「数学みえる化プロジェクト」が始まりました。

トンカチやドライバーを使って機器を製作してみたものの、当初作った機器で行った実験は理論とはかけ離れた結果でした。そもそも、数学では極限まで理想化、単純化された設定において頭を使って本質や真理を考察することが多く、このような作業には慣れていません。ただ、体を使って作業を進めると確かに新たな感覚が生まれ、失敗作の中にこそ今後数学的に追及したいと思う発見もありました。なにより、試行錯誤と想定外の発見が単純に楽しく感じられました。

勉強会が続くと扱うテーマが増え、会の立ち上げから4年後にそれまでの成果を北海道大学総合博物館の2022年夏季特別展示「感じる数学 Tangible Math ～ガリレイからポアンカレまで～」にて報告する機会を頂きました。本書はその展示と連動した書籍です。本文には筆者たちのモノづくりの経験が随所に生きていますが、展示会とは独立して成立しています。展示に参加された方にはさらに理解を深めてじっくり味わっていただけると思います。

展示では一つの物語を紡ぎました。本書の目的は、この物語をやさしく

紹介し、筆者達を感動させてきた（そしていまも感動させている）数学の魅力伝えることです。本書を通して、無色透明な数学が見えるものとして感じられるようになれば幸いです。

本文では、まずどの数学者がどんな仕事をしたか言葉で述べ、それを補うように数式を用いた説明をつけることで、アイデアと考え方がわかるように努めました。各章では一つのテーマを扱い、数学の知識を全く必要としない箇所と、やや高等な数学も踏まえた説明の箇所の両方をバランスよく配置しました。

数学に踏み込む節にはスピードマークの印が付いています。数学が得意な高校生は説明文と数式までぜひ読み込んでみてください。それ以外の節には囲みを付けました。数学が苦手な読者はそこだけ読んでいただき、数学の世界の一端に触れてもらえたらうれしく思います。

ところどころ説明に熱が入りすぎて普段数学に触れていない読者は読みづらい箇所があるかもしれません。そういうときはいったん読み飛ばして先に進んでください。言葉だけでもメッセージは伝わるように書きました。

本書には演習問題がない代わりに各章ごとにクイズがあります。挑戦してみてください。

また、同じ目的の下、章ごとに担当した著者が適切だと思う表現方法を優先することにしました。それゆえ全体としては体裁が整っていない点もありますが、ご了承願います。

では、物語を手短かに説明しましょう。

皆さんは、今日「1秒」がどのように定義されるかご存知ですか？「1秒」は100億分の1の誤差で、セシウム133原子に関する周期をもとに定義されます。そして、この「周期」を用いるアイデアは弱冠17歳のガリレイが「時間」を「幾何学」に取り込む方法を振り子の周期に見出したこ

とに端を発します。古代ギリシャの賢人たちも手がつかなかった「運動」に人類がはじめて着手した記念すべき瞬間です。

本書もガリレイで幕開けます。ガリレイは「最適化」という問題にも挑みました。これは現代でも多くの応用をもつ重要なテーマです。

粗削りだったガリレイの仕事はホイヘンスらの洗練された手法で完璧なものに仕上げられました。とりわけ、フェルマーは「光は2点を結ぶ最速経路を進む」という古来からあった考えをもとに、光の屈折に関するスネルの法則を数式を用いて導きました。これは、その後の物理学の指導原理「最小作用の原理」に発展するとともに重要な仕事です。ホイヘンスやフェルマーの仕事については第2章で説明します。

ガリレイやホイヘンスは望遠鏡で天体を観測しましたが、ニュートンはガリレイやケプラーの業績をもとに偉大な理論、すなわちニュートン力学と微積分学を構築して、万有引力に従う2点の動きを決定する二体問題を解決しました。第3章では関数や写像、微分や積分など、数式を用いた解説を理解するために必要な言葉と概念を準備して、さらに二体問題についても解説します。

オイラーとラグランジュはニュートンの仕事を基礎にフェルマーの原理を深化させて、解析学の金字塔である変分法を打ち立てました。変分法と最適化には数学の枠を超えた幅広い応用があり、第4章ではその考え方から現在進行形の最新の応用まで変分法に関する話題を紹介します。

このように、古代ギリシャ時代から何世紀にもわたり巨人が巨人の肩の上に乗る、その脈々と受け継がれてきた活動から得られた成果は人類に計り知れないほど多くの実りを与えてきました。

19世紀末になると、これまでの方法の限界があらわになります。太陽と地球、それに月の影響まで考慮した三体問題では、特殊な場合以外は天体の軌道を未来永劫には求めることができないのです。この限界はどうなったか？ 実はその突破には、一見無関係に思える「世界で二番目に美しい

数式」を萌芽にもつポアンカレの^{ひらめ}閃きが必要でした。

それを説明するためには時代を^{さかのぼ}遡る必要があります。数学においては「不変量」という大事な考え方があります。第5章では不変量の考え方をういて難問が鮮やかに解かれた話や、オイラーによる世界で二番目に美しい数式とその先の発展について紹介します。

ポアンカレは新しい数学を用いて突破口を見つけただけではなく、最も取り扱いやすい周期的な軌道の近くに予測不能な振る舞いをする軌道がいくらかでもあることも発見しました。カオスの発見です。第6章ではポアンカレの仕事を中心に、バタフライ効果、また二重振り子について解説します。二重振り子も気象もパチンコ玉も人生も、先が読めないことでは同じです。こうして物語は我々の出発点^{しゅうれん}に収斂します。

最後の章は「偶然」についてのお話です。偶然がどのように数学化され、そして、それがどうやって冒頭に述べた現象を解明するかを解説します。

なお、本書には書ききれなかった内容を共立出版ホームページに付録として掲載しています。以下のURLからダウンロードできるので、ぜひご覧ください。

<https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10013491.html>



最後に、本書を刊行するにあたり、たくさんの方々の励ましとサポートを受けました。万謝します。まず、大原昌宏氏（北海道大学教授）には本書を世に出すきっかけを作っていただき、また、多くの貴重なご意見とご助言をいただきました。札幌大同印刷株式会社の岡田善敬氏には我々の期待を大きく超えるデザインで本書を一層魅力的なものにいただきました。Nathan Kandus氏には二重振り子の設計図の使用を快く引き受けていただき、株式会社エーアイテックには機器の製作指導とそのための合宿施設の利用など多大なご支援をいただきました。そして、北海道大学理

学部数学科3年生の工藤拓人氏と藤井龍希氏には合宿に参加してゴルトンボードを完成まで仕上げ、さらに本書の日本語を隅々まで確認してたくさん
の誤りや改善点をご指摘いただきました。最後に、少し変わったテーマ
とタイトなスケジュールを見事にまとめて下さり、発刊に導いて下さった
共立出版の大谷早紀氏のご尽力に謝意を表します。

2022年6月 正宗 淳

目 次

執筆者一覧	ii
まえがき	iii
第1章 ガリレイの振り子	1
1.1 偉大な閃き ^{ひらめ} 2	
1.2 ガリレイの実験と数学 ♣ 5	
この章のクイズの答え 12	
第2章 サイクロイド：円みたいな曲線	15
2.1 等時曲線を求めよ！ 16	
2.2 ホイヘンスのサイクロイド振り子 19	
2.3 最速降下曲線を求めよ！ 21	
2.4 スネルの法則から最速降下曲線へ：ベルヌーイのアプローチ 22	
2.5 数式を用いた解説 ♣ 24	
この章のクイズの答え 35	
第3章 微分積分	37
3.1 ニュートン登場 38	
3.2 微分：変化をつかまえよ 40	
3.3 積分：大きさを測れ 49	
3.4 ニュートンの運動方程式 ♣ 53	
この章のクイズの答え 61	

第4章 変分法と最適化 ————— 65

- 4.1 変分法の考え方 66
- 4.2 変分法による最速降下曲線の求め方 ♠ 71
- 4.3 オイラー＝ラグランジュ方程式 76
- 4.4 調和関数とディリクレの原理 81
- 4.5 高次元ユークリッド空間の調和関数 ♠ 85
- 4.6 均質化法 91
- 4.7 トポロジー最適化 102
- この章のクイズの答え 107

第5章 不変量 ————— 109

- 5.1 デュードニーの分割 111
- 5.2 多面体の切り貼りとデーン不変量 113
- 5.3 多面体とは？ 116
- 5.4 世界で二番目に美しい数式：オイラーの多面体定理 117
- 5.5 多面体定理の周辺 123
- 5.6 曲面のオイラー標数と流れ 125
- 5.7 流れの中のオイラー標数とポアンカレ＝ホップの定理 131
- 5.8 証明 ♠ 132
- この章のクイズの答え 139

第6章 三体問題とカオス	143
6.1 はじめに	144
6.2 二体問題はなぜ解けるのか	146
6.3 ポアンカレの発見	151
6.4 カオス	157
この章のクイズの答え	164
第7章 混沌と驚異	167
7.1 確率の世界へ	168
7.2 中心極限定理とその実験	174
7.3 数式を用いた解説 ♣	182
この章のクイズの答え	186
あとがき：ヒルベルトと数学の問題	189
数学者年表	192
索引	193