



まえがき

細長い紙片を手にとって、その端と端を貼り合わせて輪を作る。このときひねらずに貼り合わせると通常の帯が得られるが、一方の端を半回転させて、貼り合わせるとメビウスの帯が得られる。

メビウス (A.F.Möbius) がこの裏表のない有名な輪を発見したのは、彼の日記によると 1858 年のことらしい。発見から 160 年以上を経た現在でも、メビウスの帯は芸術、デザイン、文学、科学、工学の分野で生きつづけている¹⁾。この発見は、“向き”の概念を明確にするとともに、簡単な図形の貼り合わせという操作で興味深い図形が得られる可能性を切り拓き、図形や空間の認識における大きな飛躍をもたらした。

メビウスの帯は 2 次元の図形であるが、3 次元に目を向けてみよう²⁾。私たちは縦、横、高さをもつ 3 次元の空間の中に身をおいている。どこに行っても、この状況は変わることはない。このような図形を“3 次元多様体”とよぶ。3 次元多様体が数学の対象として意識され始めたのは、ポアンカレ予想が登場した 20 世紀初頭のことである。

ポアンカレ (H. Poincaré) が活躍していた頃は、基本群がポアンカレ自身によって定義され、オイラー数の概念もベッチ数やねじれ数をはじめとするホモロジーの概念³⁾に昇華され、不変量も整備されつつあった。これらの不変量を試す格好の対象が 3 次元多様体であったに違いない。1904 年にポアンカレによって、ホモロジーが自明であるにもかかわらず非自明な基本群をもつホモロジー 3 球面 (ポアンカレホモロジー 3 球面) が発見され、ホモロジーとホモトピーの差が明確になった。そ

¹⁾ リサイクルマークにはメビウスの帯が使われている。また、ベルトの摩耗を軽減するためにベルトコンベヤーにもメビウスの帯が使われている。

²⁾ メビウスの帯は 2 次元であるが、2 次元平面の中では実現できない。また、裏と表という表現は 3 次元からの視点である。

³⁾ 部分多様体の間のホモログといった関係など。ちなみにホモロジー“群”自体は 1925 年にネーター (E. Noether) によって定義された。

の舞台がまさに3次元多様体であり、この例により、ポアンカレが初期の予想を改め、ポアンカレ予想が生まれたことはよく知られている。

デーン (M. Dehn) は1910年に3次元球面とは異なるホモロジー3球面の構成に取り組み、今日“デーン手術”とよばれる手法を編み出し、無限個のホモロジー3球面を構成することに成功した。その後デーン手術の研究は、3次元トポロジーにおいて主役を担ったり脇役を演じたりしながら、3次元トポロジーの発展とともに進化を遂げてきた。3次元トポロジーにはさまざまな研究テーマが存在するが、デーン手術はほとんどすべてのテーマと関連している、あるいは関連付けることが可能であるといっても過言ではない。

本書では、デーン手術を1つの柱にして、3次元トポロジーを展開する。これから3次元トポロジーの研究を志す学部生や大学院生、ならびに3次元トポロジーを必要とする研究者に、基本的な知識や技術を身につけてもらうことを目標としている。ホモロジー群や基本群、被覆空間論の初歩については既知であるものとして話を進める。必要に応じて教科書で知識を補ってほしい(「読書案内」参照)。

本書で取り上げる内容は以下の通りである。

- 第1章：本書を通じて舞台となる3次元多様体について、多様体論の立場から振り返る。ここでのいくつかの内容については、付録で詳しく見ていく。
- 第2章：2.1節を結び目理論の速習コースにあて、本書を通じて必要な、3次元球面内の結び目に関する基本的な用語を準備する。その後、結び目、絡み目のデーン手術がどのような操作であるかを解説する。2.3節では、デーン手術と群論に関する基本的な結果をいくつか紹介する。
- 第3章：デーン手術の基本的かつ重要な事実である「すべての向き付け可能な3次元閉多様体は3次元球面内の絡み目のデーン手術で得られる」というリコリッシュ (W.B.R. Lickorish)・ウォレス (A.H. Wallace) の定理を証明する。また、この定理と対をなすカービー・ロルフセン計算 (Kirby-Rolfsen calculus) を紹介する。
- 第4章：3次元トポロジーでは欠かせない“切り貼り技巧”とともに圧縮不可能曲面について学ぶ。
- 第5章：局所的にしか捉えられてこなかった曲面の交わりを、曲面上のグラフとして大域的に捉える研究が1990年代から盛んに行われるようになった。曲面の交わりを大域的に解析する、グラフ理論を利用したデーン手術の研究を紹介する。

- 第6章：3次元トポロジーをはじめ4次元トポロジー，特異点論など様々な分野に登場するザイフェルト多様体の基本事項を学ぶ。6.4節では，有理タングルやモンテシノストリックといった話題にも触れる。
- 第7章：3次元多様体は素分解とトーラス分解により単純なピースに分解される。各ピースは第6章で登場したザイフェルト多様体かアトロイダル多様体とよばれる3次元多様体になる。アトロイダル多様体の正体は第9章で明らかになる。本章ではトーラス分解の存在と一意性を証明する。
- 第8章：1970年代にサーストン (W. Thurston) は非常に多くの3次元多様体が完備双曲構造をもつことを証明し，3次元トポロジーにおける幾何的手法の重要性ならびに有効性を明らかにした。ここでは双曲多様体の基本事項を概観する。また，8.3節で曲面の自己同相写像のニールセン・サーストン分類とマッピングトーラスの双曲性に関する結果を紹介する。
- 第9章：3次元トポロジーにおけるザイフェルト多様体および有限体積の完備双曲多様体の立ち位置を明確にする。トーラス分解を通じてこれらの多様体がいかに補完し合う姿が浮かび上がる。
- 第10章：ザイフェルト構造，双曲構造，トーラス分解がデーンフィリングという操作のもとで基本的に保たれることを観察する。この基本原理がデーン手術の研究の中核を担ってきたといっても過言ではない。
10.2節ではサーストンの双曲デーン手術理論を扱う。そこでは，デーンフィリングという貼り合わせの操作が双曲構造の連続的な変形と完備化という視点で捉えられる。デーンフィリングして得られた3次元多様体に双曲構造を入れるのではなく，双曲構造を変形して完備化するとデーンフィリングした3次元多様体になるという，逆の視点を詳しく解説する。
- 第11章：双曲結び目をデーン手術すると，高々有限個のデーン手術を除き完備双曲多様体得られることがわかる（双曲デーン手術定理）。除外される有限個のデーン手術は例外手術とよばれ，重要な研究対象となった。本章では例外手術の例として，ザイフェルト多様体を生み出すザイフェルト手術に焦点を当てる。デーン手術でザイフェルト多様体得られているとき，それが実際にザイフェルト多様体になっていることをどのように確認するのか，いくつかの方法を具体例とともに紹介する。
- 第12章：ザイフェルト手術全体を，ネットワークの視点から大域的に理解する試みとして，デリユエール (A. Deruelle) 氏，宮崎氏と筆者が提案しているザイフェルト手術ネットワークの研究を紹介する。

- 第13章：ザイフェルト多様体のような，あるクラスの3次元多様体がどのようなデーン手術で生じるか，という問題意識から離れ，異なるデーン手術で同じ3次元多様体が生じるかという問題を考える。これはデーン手術の“単射性”に関する問題であり，古典的なテーマともいえる。
- 第14章：双曲デーン手術定理の登場で，デーン手術の研究は大きな転換点を迎えたが，その後オズヴァス (P. Ozsváth) とザボ (Z. Szabó) によるヒーガードフレアー理論の登場によりあらたな展開を見せている。本章ではヒーガードフレアー理論の登場後の最近の話題について簡単に触れる。
- 付録：第14章までの内容が3次元多様体論に関するものであるのに対して，付録で扱う内容は3次元“の”多様体論とでもよぶべきものである。3次元の多様体論をきちんと理解するため，一般次元の多様体論を俯瞰する。ここでは，いわゆる多様体論を通じて，3次元トポロジーの舞台である3次元多様体そのものに目を向けてみたい。

「数学者とは不正確な図を見ながら正確な推論のできる人間のことである」

というポアンカレの言葉がある。本書でもごく一部だけを取り出して描いたり，次元を下げて描いたりしたような“不正確な図”が頻繁に登場する。その図において“何が正しく描かれ”，“どこがごまかされているか”を常に意識して読み進めてほしい。

2021 年 10 月

茂手木公彦

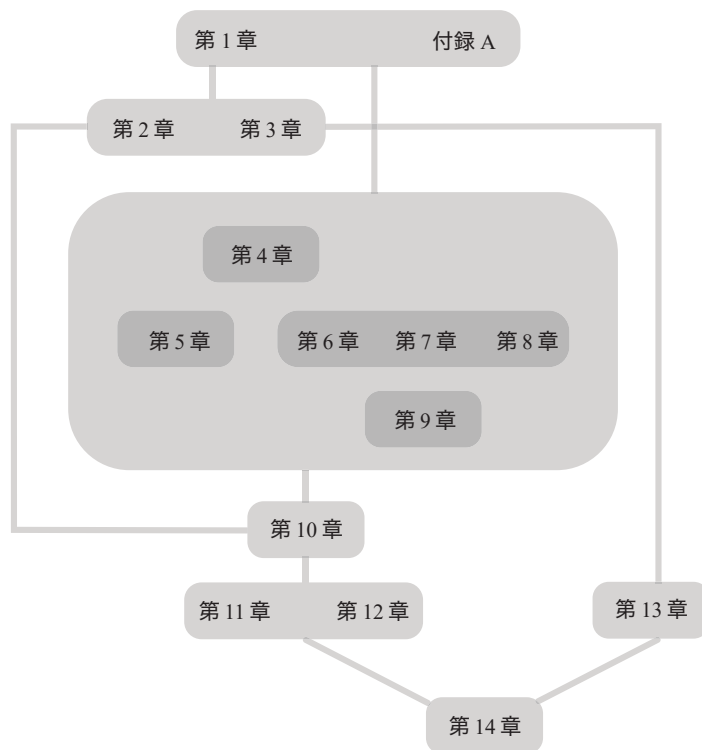


図 1 各章のおおまかな関係