

< p.184 の注 7 > 中心極限定理の説明に関しての詳しい説明です.

1 スターリングの公式

スターリングの公式は $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ つまり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad (1)$$

という等式のことですが, 書籍では証明なしに話を進めました. ここでは (1) が正しいことの証明について述べます.

証明は次の枠内の説明の流れに沿って話を進めます.

説明の流れ

I. 予備知識

(i) ウォリス (Wallis) の公式 p.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

(ii) 交代級数 p.3

正負の項が交互に現れる級数を交代級数と言います. 交代級数について良く知られた次の定理があります.

定理 (交代級数の収束条件)

数列 $\{a_n\}, a_n > 0$, が 0 に収束する単調減少数列なら, 交代級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する.

(iii) ガンマ関数 p.4

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

とおくと, 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ が成り立つ.

II. スターリングの公式の証明 p.5

1.1 ウォリス (Wallis) の公式

次の等式をウォリスの公式と呼んでいます.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

(ウォリスの公式 の証明)

n を非負整数として

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (3)$$

とおくと, 部分積分により

$$S_n = (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n$$

であることがわかり, このことから

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (4)$$

が得られる. また, $S_0 = \frac{\pi}{2}$, $S_1 = 1$ であることがすぐにわかるので,

$$\begin{cases} S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \\ S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \end{cases} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \quad (6)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $0 < \sin x < 1$ であるから, (3) より S_n は単調減少する正の数数列であることがわかり

$$1 < \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} < \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} = 1 \quad (7)$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)} \quad (\because (6))$$

(ウォリスの公式の証明終わり)

ウォリス の公式は次のように変形できます.

$$S_{2n} S_{2n+1} = \frac{\pi}{4n+2} \quad (\because (5))$$

$$S_{2n+1} \sqrt{\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}} = \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} S_{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n \cdot \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \cdot S_{2n} \cdot S_{2n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi n}{4n+2} \cdot \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\because (7))
\end{aligned}$$

ところで、(5) より $S_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$ なので、次の式が得られます。

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} \quad (8)$$

この式は次のようにも書き換えられます ($\sim$ は n が大きいと、 $\sim$ の左と右の比が 1 に近づくという意味です)。

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \quad (9)$$

1.2 交代級数

交代級数の収束条件の証明ですが、区間縮小法というものを使います。証明に取りかかる前に区間縮小法について見ておきましょう。

【区間縮小法】

閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) において、次の (i), (ii) が成り立っているとする。

(i) 各区間 I_n はその前の区間 I_{n-1} に含まれる (つまり、 $a_{n-1} \leq a_n, b_n \leq b_{n-1}$)。

(ii) 区間の幅 $b_n - a_n$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

このとき、これらの各区間に含まれる共通な要素がただ一つ存在する。その要素を α とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ である。

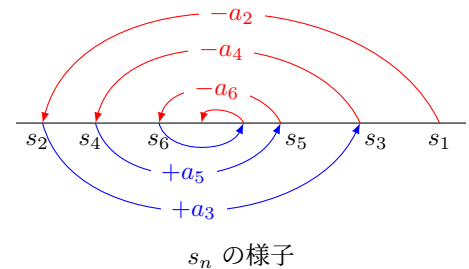
正しいことは感覚的にわかりますね。この区間縮小法は実数が持つ奥深い性質の一つで、大学の数学科では一年次の解析学という分野の授業で学びます。

p.1 の I (ii) で述べた 定理 (交代級数の収束条件) の証明に取りかかりましょう。

(定理 (交代級数の収束条件) の証明)

級数の部分和を $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n$ とおくと、 $\{a_n\}$ は単調減少数列なので、

$$\begin{aligned}
s_{2k+1} &= s_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \leq s_{2k-1} \\
s_{2k+2} &= s_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq s_{2k} \\
s_{2k+1} &> s_{2k} \quad (\because a_{2k+1} > 0) \\
\therefore s_2 &\leq s_4 \leq s_6 \leq \dots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1
\end{aligned}$$



である。ここで、区間の列

$$I_1 = [s_2, s_1], I_2 = [s_4, s_3], \dots, I_n = [s_{2n}, s_{2n-1}], \dots$$

を考えると、各区間は I_n はその前の区間 I_{n-1} に含まれている。そして、区間 I_n の幅 $s_{2n-1} - s_{2n}$ について、 $0 \leq s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$ なので、区間縮小法より、各区間に含まれる共通な要素がただ一つ存在し、その要素を α とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \alpha$ である。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$ がわかり、証明された。
(定理 (交代級数の収束条件) の証明 終わり)

1.3 ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は大学で学習する大切な関数で、次の式で定義されます。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0)$$

積分範囲の上側は ∞ ですが、

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-t} t^{x-1} dt$$

と考えれば良いのではないかと推測が付くと思います。注意深い読者は $0 < x < 1$ のとき、積分範囲の下限 $t = 0$ も気になっていることでしょう。被積分関数 $e^{-t} t^{x-1}$ は $t = 0$ で定義できません (理由は何故かクイズとして考えてみて下さい。ヒントはキーワード的に“分母”です。クイズの答はこの段落の最後にご紹介します)。 $0 < x < 1$ の場合は

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow +0}} \int_q^p e^{-t} t^{x-1} dt \quad (10)$$

のことだと理解すればいいですね。ガンマ関数の定義域は $x > 0$ です。

(クイズの答: $e^{-t} t^{x-1} = \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}$ であり、 $0 < x < 1$ なら $t = 0$ のときに分母 $= t^{1-x}$ は 0 になってしまう)

ガンマ関数の性質: 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ は部分積分で次のように示せます。

n が自然数のとき

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow +0}} \int_q^p e^{-t} t^n dt \\ &= \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow +0}} \left\{ [-e^{-t} t^n]_q^p + n \int_q^p e^{-t} t^{n-1} dt \right\} \\ &= n \Gamma(n) \quad \left(\because \text{ロピタルの定理から } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^n}{e^p} = 0 \right) \end{aligned}$$

これから $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ であることがわかるので,

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot \Gamma(1) \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \\ &= (n-1)!\end{aligned}$$

以上でガンマ関数の性質が示されました.

1.4 スターリングの公式：(1) の証明

いよいよ当初の目的であるスターリングの公式：(1) の証明に取りかかりましょう.

下の図は $1 \leq x \leq n$ にある $y = \log x$ と x 軸に挟まれた部分の面積を, $(n-1)$ 個の長方形で近似しようとした図です. 各長方形は x 軸上の辺が閉区間 $\left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$, 高さが $\log k$ となるもの ($1 \leq k \leq n-1$) 及び閉区間 $\left[n - \frac{1}{2}, n\right]$ 高さが $\log n$ となるものです.

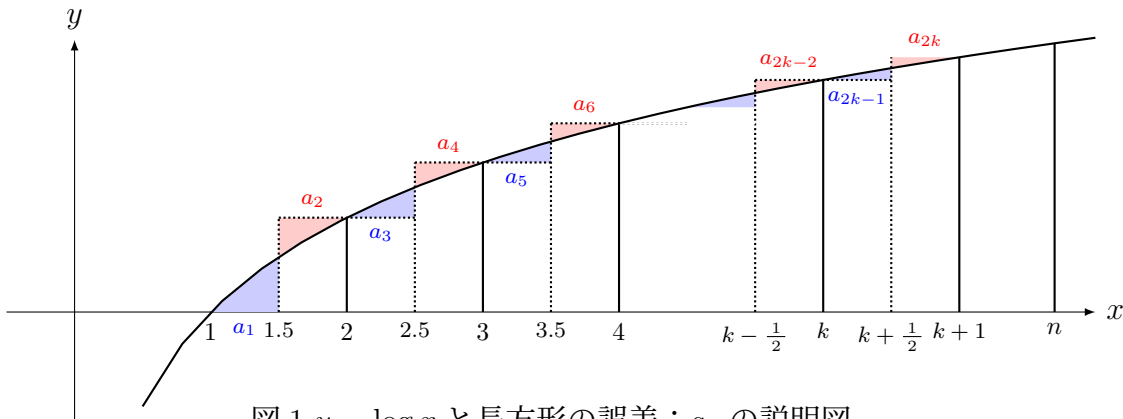


図 1 $y = \log x$ と長方形の誤差: a_n の説明図

$1 \leq x \leq n$ にある $y = \log x$ と x 軸に挟まれた部分の面積は $\int_1^n \log x dx$ です. この面積と長方形達との誤差は上の図赤い部分と青い部分で示した所になり, 赤い部分は多く見積もられる部分, 青い部分は少なく見積もられる部分です. この誤差の部分の面積を左から順に図のように $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2(n-1)-1}, a_{2(n-1)}$ とすると,

$$\begin{aligned}\int_1^n \log x dx - (\text{長方形達の面積}) &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2(n-1)-1} - a_{2(n-1)} \\ (\text{長方形達の面積}) &= \sum_{k=2}^{n-1} \log k + \frac{1}{2} \log n \\ \therefore \log(n-1)! &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \log n - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{2k-1} - a_{2k})\end{aligned}$$

となることがわかります. 予備知識の交代級数の収束条件が関係ありそうな気がしてきました. $a_n > 0$ は明らかです. $\{a_n\}$ が単調減少し, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることがわか

れば、定理から、ある値 δ が存在して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} - a_{2k}) = \delta$$

$\delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{2k-1} - a_{2k})$ とおくと、次のことが成り立つことになります。

$$\begin{cases} \log(n-1)! = \left(n - \frac{1}{2}\right) \log n - n + 1 - \delta_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta \end{cases} \quad (11)$$

$\{a_n\}$ が単調減少し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることは後ほど示すことにし、(11) を用いるとスターリングの公式が得られることを見ていきましょう。

(11) の上の式から

$$(n-1)! = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{1-\delta_n}$$

が得られます。 $e^{1-\delta} = A$ とおくと

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n)^{2n+1} e^{-2n}} \quad (13)$$

が成り立ちます。(12),(13) は次のように変形できます。

$$\begin{aligned} A^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{n^{2n+1} e^{-2n}} \\ \frac{1}{A} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^{2n+1} e^{-2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

この2式をかけると

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 (2n)^{2n+1} e^{-2n}}{(2n)! n^{2n+1} e^{-2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \sqrt{2}}{\sqrt{n} \binom{2n}{n}} = \sqrt{2\pi} \quad (\because \text{ウォリスの公式})$$

よって、(12) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$$

であることがわかります。この式は(1)であり、スターリングの公式が得られたことになります。

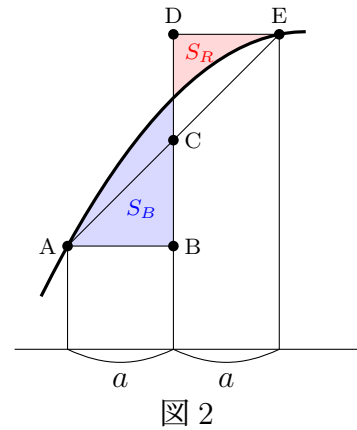
最後に、交代級数の収束条件： $\{a_n\}$ が単調減少し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が満たされていることを確認しましょう。

$\{a_n\}$ が単調減少数列であることについては、 $y = \log x$ が上に凸な単調増加関数であることを用いて初等幾何的な考察で簡単に理解できます。図1 (p.5) の青領域・赤領域を基に以下説明します。

右図2のように隣り合う青の部分の面積 S_B と赤の部分の面積 S_R の大小について考える（各点 A~E がどのような点であるかの説明は煩雑なので省く）。

グラフは上に凸なので、線分 AE はグラフの下にあることがわかり、

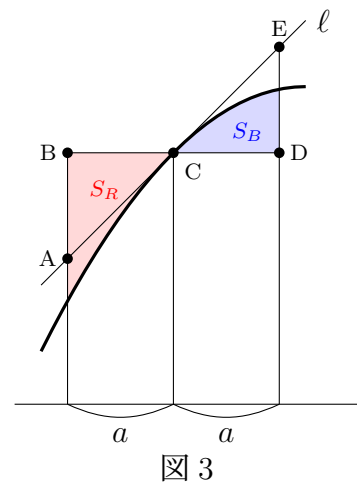
$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle CDE \\ \triangle ABC &< S_B, \quad \triangle CDE > S_R \\ \therefore S_R &< S_B\end{aligned}$$



次に、右図3のように隣り合う赤の部分の面積 S_R と青の部分の面積 S_B の大小について考える。ℓは点 C におけるグラフの接線である。

グラフは上に凸なので、接線 ℓ はグラフの上にあることがわかり、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle CDE \\ \triangle ABC &< S_R, \quad \triangle CDE > S_B \\ \therefore S_R &< S_B\end{aligned}$$



以上をまとめると、長方形とグラフとの誤差について、隣り合い方が“赤・青”の順であっても“赤・青”の順であっても、左にある誤差の負が右にある誤差よりも大であるということが判明しました。つまり、数列 $\{a_n\}$ が単調減少数列である、ということがわかりました。

最後に $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示しましょう。5 ページの図 1 及び上の図 2 からわかるように

$$\begin{aligned}0 < a_{2n} &= \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \log x \, dx < \frac{1}{2} (\log n - \log (n-1)) = \frac{1}{2} \log \frac{n}{n-1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n}{n-1} &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= 0\end{aligned}$$

また $\{a_n\}$ は単調減少より、 $0 < a_{2n+1} < a_{2n}$ なので $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ がわかり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が成り立つことがわかる。……………（スターリングの公式の証明 終わり）

予備知識の交代級数の説明で“区間縮小法”についてお話をしました。区間縮小法は“実数の連続性”と呼ばれている事柄に関わっています。実数についての深い議論を経て、数学は今日あるようなしっかりした土台の上に築かれるようになりました。次に実数の連続性に関わり、実数の公理についてお話ししましょう。

2 実数の公理

「実数に関する性質であり、誰もがそれは証明無しに正しいと思え、その性質を使って他の実数に関する全ての性質が証明できる」そのような性質があります。『実数の連続性』と呼ばれている公理です。

この公理の説明をする前に、有名なデデキントの切断について見ておきます。

＜デデキントの切断＞

数のある集合 U を 2 つの集合 A, B に分けることを考えます。デデキントの切断という分け方があります。それは次のような制約が設けられた分け方です。

デデキントの切断 (A, B)

数の集合を U とし U を 2 つの部分集合 A, B に分ける方法として、次の制約を課す。この制約を満たす組分けを (A, B) と表し、デデキントの切断と呼ぶ。

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$. ($\emptyset$: 空集合)
- $U = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$
- 任意の $a \in A$, 任意の $b \in B$ について $a < b$ が成り立つ。

デデキントの切断 (A, B) において、 A を下組, B を上組と言う。

(数直線を思い浮かべると切断という言葉のイメージがぴったりの感じがします)

デデキントは次の定理を主張しました。

【 (デデキントの) 定理 】

実数の切断 ($U = \mathbb{R}$ とした場合) は、下組と上組の境界として一つの数を確定する。

如何でしょうか。当たり前のように思えないでしょうか。例えば、

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\} \\ B &= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 3\} \end{aligned} \tag{14}$$

はデデキントの切断になっています。この (A, B) の下組と上組の境界は 3 です。わざわざ定理として主張するほどのことではないように見えるかも知れません。

実は、定理は今の例のように“ある数”より大きな数や小さな数を集めて集合を作った場合のことだけではなく、デデキントの切断の制約を満たすような分け方があれば、それには今見た“3”のような 2 つの集合を分け隔てる数が（たとえその数が何かを知らなくても）必ず存在するんだ、しかもただ一つ、と主張しているのです。そしてこの境界となる“数が決まる”ということが実数の大切な性質なんだ、と見抜いたところが凄いのです。

2.1 実数の連続性

一般に数の集合 U についてデデキントの切断 (A, B) があったとき、理論上次の 3 タイプが考えられます。

【跳 び】 下組に最大数があり、かつ上組に最小数がある。

つまり、下組と上組の間に跳びがある。

【途切れ】 下組に最大数がなく、かつ上組に最小数がない。

つまり、下組と上組の間に途切れがある。

【連 続】 下組または上組に端（最大または最小）があり他の一方には端がない。

つまり、下組と上組は連続している。

そして、 $U = \mathbb{R}$ 実数全体のときには『連続』のタイプです。それで、この事実を『実数の連続性』と呼んでいます。

では、有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ と表しますが、 $U = \mathbb{R}$ の場合について考えてみましょう。

$$\begin{aligned} A' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 3 \text{ または } x \leq 0\} \\ B' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 > 3 \text{ かつ } x > 0\} \end{aligned} \quad (15)$$

とおくと、 A', B' はデデキントの切断になっています。しかし、下組 A' に最大数はなく、上組 B' に最小数がありません。つまり有理数しか考えない世界では【途切れ】の切断があり得ることになります。そして、 q を任意の有理数として

$$\begin{aligned} A' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \leq q\} \\ B' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < q \text{ かつ } x > 0\} \end{aligned} \quad (16)$$

とおくと、 A', B' はデデキントの切断で【連続】の切断です。

では、【跳び】の切断は有理数 $\mathbb{Q}$ の世界にはあるのでしょうか？【跳び】の切断はありません。それは次の命題から何故かが簡単にわかります。

<命題>

異なる有理数があれば、その二つの有理数の間にその二つとは異なる有理数がある。

(証明)

a, b を $a < b$ である有理数とする。このとき $c = \frac{a+b}{2}$ とおくと、 c は有理数であり $a < c < b$ である。よって示された。…………… (証明終わり)

この命題は、【跳び】というタイプの切断は無い、ということを言っています！

＜余談＞ この命題は【途切れ】の切断がないことを言っている以上に次のことも我々に教えてくれます．有理数があると，その有理数の近くには有理数が無限に存在する，ということです (a と b の自然数比 $m:n$ に内分した点を考えればその多さが実感できるでしょうか)．この事実を有理数の稠密性と呼んでいます． ＜余談終わり＞

さて， $\mathbb{R}$ の世界には【途切れ】の切断がなかったのに， $\mathbb{Q}$ の世界には存在しました．この違いを生み出しているものは何でしょうか．【連続】の切断に示した (16) の境界は有理数であり，有理数を境界に持つ切断は必ず切断は【連続】になります．しかし，【途切れ】の例 (15) の境界は $\sqrt{3}$ ，無理数です．そして無理数が境界となる $\mathbb{Q}$ の切断は必ず【途切れ】の切断になることが示せます (証明は読者に任せます)．

実は，デデキントはこの違いから有理数の世界を拡張して実数の世界を生み出す方法を示しました．自然数 (整数) $\rightarrow$ 有理数 $\rightarrow$ 実数という数の世界の拡張は数学の歴史の一大ドラマですが，ここではドラマに触れず先に進みましょう．

3 区間縮小法の証明

区間縮小法の証明に使う定理をまず見ておきましょう．

【有界単調数列の収束定理】

- (1) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であるとする．しかも，ある数 s があってどの項も $a_n \leq s$ を満たしているなら，数列 $\{a_n\}$ は極限値を持つ．
- (2) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少であるとする．しかも，ある数 s があってどの項も $a_n \geq s$ を満たしているなら，数列 $\{a_n\}$ は極限値を持つ．

(1) のような s を数列 $\{a_n\}$ の上界と呼びます．また，上界が存在する数列を上の有界な数列と呼びます．(2) のような s を数列 $\{a_n\}$ の下界と呼びます．また，下界が存在する数列を下に有界な数列と呼びます．上にも下にも有界な数列は単に有界な数列と言います．例えば，例の一つ見てみましょう．

＜例 1＞ $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ は単調増加で 100 は上界です (えーっ! “1” じゃないんですか? という声が聞こえてきそうです．1 も上界です．上の定理で言っている条件としては，上界はなるべく小さな数である必要はありません．また，1 つ上界が見つければ，その上界よりも大きな数はどれも上界です．とにかく，何でもよいから 1 つ見つければいいのです．上界は何個もあります．ですから，“ s は上界である” という文章はあり得ても，“上界は s である” などという文章は，書いた時点で偽の文章になります)．定理は， a_n には極限があると言っています．実際 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ で，確かに極限があり，定理はこの数列の場合成り立っています．

どんな場合でも上記定理が正しいことの説明をしましょう．

(有界単調数列の収束定理が正しいことの説明)

- (1) $B = \{p \mid p \text{ は数列 } \{a_n\} \text{ の上界} \}$ とおき, $A = B^c$ (B の補集合) とおくと, (A, B) はデデキントの切断になる. よって, この切断の境界として数が決まる. その数を q とする. このとき $a_n \rightarrow q$ ($n \rightarrow \infty$) であることを以下に示そう.

任意の自然数 m について, $0 \leq q - a_k < 10^{-m}$ となる自然数 k が必ずある. なぜなら, どんな自然数 k についても $q - a_k \geq 10^{-m}$ であれば,

$$q - \frac{1}{2} \times 10^{-m} > a_k + \frac{1}{2} \times 10^{-m} > a_k$$

つまり $a_k < q - \frac{1}{2} \times 10^{-m}$ となり, $q - \frac{1}{2} \times 10^{-m}$ は数列 $\{a_n\}$ の上界であるから $q - \frac{1}{2} \times 10^{-m} \in B$ であることがわかる. q は (A, B) の境界なので, q より小さな数は A の要素である. よって, $q - \frac{1}{2} \times 10^{-m} \in A$ であり,

$$q - \frac{1}{2} \times 10^{-m} \in A \cap B \quad \therefore A \cap B \neq \emptyset$$

となり (A, B) がデデキントの切断であることに反する. よって, 任意の自然数 m について, $0 \leq q - a_k < \frac{1}{10^{-m}}$ となる自然数 k が必ずあることが示された. k より大きな任意の自然数を ℓ とすると, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であったことから,

$$0 \leq q - a_\ell < 10^{-m}$$

であることがわかる. $10^{-m} = 0. \underbrace{0 \cdots 0}_{(m-1) \text{ 個}} 1$ なので a_ℓ は q と小数第 $(m-1)$ 位までぴったり同じ数字が並んでいることになる. 第 ℓ 項以降の a_n は全て q の小数第 $(m-1)$ 位まで一致していて, $m \rightarrow \infty$ を考えれば, 限りなく a_n は q に近づいていくことがわかる.

- (2) (1) の証明と全く同様に示せる. (説明終わり)

<振り返り> 今の証明で

- (i) $\{a_n\}$ の項はある番号 ℓ から先 q の小数第 m 位までぴったり一致している.
- (ii) 上記事柄は m がどんなに大きくなっても成り立っている.

ということから $a_n \rightarrow q$ であると判断しました. そのために誤差が 10^{-m} 以下になることをきっちり示したいために $0 \leq q - a_\ell < 10^{-m}$ という式を持ち出しました. しかし, (i), (ii) で調べたいことのポイントは, a_n の n が大きくなると, q と小数点以下一致する位数が増えていくことです. 大事なことは小数第 m 位まで一致するというこの m という値をきっちりさせなくても a_n が先の方へ行くと (番号が大きいという意味) 誤差が無くなっていくことがわかれば OK です.

証明は次のようにスッキリさせて書くことができます.

(有界単調数列の収束定理 (i) の証明)

$B = \{p \mid p \text{ は数列 } \{a_n\} \text{ の上界} \}$ とおき, $A = B^c$ (B の補集合) とおくと, (A, B) はデデキントの切断になる. この切断の境界を q とする.

任意の正の数 ε に対して $0 \leq |a_k - q| < \varepsilon$ となる自然数 k が必ずあることが背理法によりわかる. なぜなら, どんな自然数 k についても $|a_k - q| \geq \varepsilon$ だとすると,

$$q - \frac{\varepsilon}{2} > a_k + \frac{\varepsilon}{2} > a_k \quad (\because |a_k - q| = q - a_k)$$

つまり $a_k < q - \frac{\varepsilon}{2}$ であり, $q - \frac{\varepsilon}{2}$ は数列 $\{a_n\}$ の上界, つまり $q - \frac{\varepsilon}{2} \in B$ であることがわかる. q は (A, B) の境界なので $q - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ であり,

$$q - \frac{\varepsilon}{2} \in A \cap B \quad \therefore A \cap B \neq \emptyset$$

であることがわかり, (A, B) がデデキントの切断であることに反する. よって, 任意の正の数 ε について, $0 \leq q - a_k < \varepsilon$ となる自然数 k が必ずあることが示された. 数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であったことから, k より大きな任意の自然数を ℓ とすると,

$$0 \leq |a_\ell - q| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q \quad (\text{証明終わり})$$

有界という言葉は折角学習したので, これをもう少し広い数の世界でも使う言葉としての定義を述べておきましょう. また, それに伴い語彙力も少し増やしましょう.

—— 【 定義 】 : 有界・上界・下界・上限・下限 ——

実数の集合 S について,

上に有界・上界・上限

S に属すどんな数も 1 つの数 M 以下であるとき, M を S の 1 つの上界と言ひ, S は上に有界であると言ひ. 上界のうち最小の数 a があれば, a を S の上限という. a はつまり次のような数である.

- S の任意の数 x に対して $x \leq a$ が成り立つ.
- $a' < a$ なら $a' < x$ であるような S の要素 x がある.

下に有界・下界・下限

S に属すどんな数も 1 つの数 M 以上であるとき, M を S の 1 つの下界と言ひ, S は下に有界であると言ひ. 下界のうち最大の数 a があれば, a を S の下限という. a はつまり次のような数である.

- S の任意の数 x に対して $x \geq a$ が成り立つ.
- $a < a'$ なら $a' > x$ であるような S の要素 x がある.

有界 S が上にも下にも有界であるとき, 単に有界と言ひ.

高校では収束・極限(値)を次のように定義しています.

—— (高校での) 収束・極限(値)の定義 ——

数列 $\{a_n\}$ において, n を **限りなく** 大きくするとき, a_n がある値 α に **限りなく** 近づくならば, $\{a_n\}$ は α に収束する, または $\{a_n\}$ の極限は α であるという. また, 値 α を $\{a_n\}$ の極限值とも言う.

“**限りなく**” という言葉が使われています. 曖昧な表現だとは思いませんか?

ここで一つ皆さんに問題を出しましょう. 少し時間を取って考えてみて下さい (ただし, 時間を取り過ぎないように!).

【 問題 】

数列 $\{a_n\}$ は収束し, その極限值は α であるとする. このとき, 第 1 項から第 n 項までの相加平均を s_n つまり

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

とおくと, 数列 $\{s_n\}$ も同じ極限值 α に収束することを示せ.

如何ですか. うまく示せましたか (「うまく示せなかった」という声を期待しています <笑>). 意地悪ですね! 意地悪を承知で問題を出したのですが, 皆さんにこれからお話しすることを実感を持ってわかって貰うための意地悪です, ご容赦下さい.

うまく示せなかった理由は高校での定義は「限りなく大きい」とか「限りなく近づく」といった, 性質を示す言葉だけの定義に終始していて, “量的なもの” が現れていません. この “量的なもの” を加味 (みえる化 or 可視化) するのが先ほどの (有界数列の定理 (i) の証明) で見た方法です. この証明中に出てきた ε, k がその量的ものに相当し, 無限というところのないものを一切使わず, 有限の値を用いて表現しているところが非常に大きな特徴で, 厳密な議論に欠かせないものとなります.

これを用いると, 収束や極限の定義を次のように明確に言い表すことが出来ます.

—— 数列の収束・極限(値)の定義 ——

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとし, α を実数とする. このとき, 任意の正の数 ε に対し, 番号 $N(\varepsilon)$ が存在し, $N(\varepsilon)$ 以上のどんな番号の n ($n \geq N(\varepsilon)$) についても

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるとき, $\{a_n\}$ は α に収束する, または $\{a_n\}$ の極限は α であるという. また, 値 α を $\{a_n\}$ の極限值とも言う.

収束や極限に関する事柄において, このような形式で議論することを “ $\varepsilon - \delta$ 論法”

と言います。書籍の第7章 p.178 に登場した言葉です。「 ε は了解, δ ではなく N じゃないの?」と思いますね。もう少し先でその疑問は解決するので待っていて下さい。量的な視点が入ると、先ほど出した問題が次のように解決します。

(問題の解答)

任意に $\varepsilon (> 0)$ を考える。 $a_n \rightarrow \alpha$ なので、番号 $N(\varepsilon)$ が存在し、 $N(\varepsilon)$ 以上のどんな番号の n ($n \leq N(\varepsilon)$) についても

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (17)$$

が成り立つ。ここで、

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N(\varepsilon)}$$

とおき、

$$N_1 = \max \left\{ \left[\frac{A}{\varepsilon} \right] + 1, N(\varepsilon) \right\} \quad (\text{ただし, } [\] \text{ はガウス記号})$$

とすると、 N_1 以上の任意の番号 n について

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ &= \frac{A}{n} + \frac{a_{N_0+1} + a_{N_0+2} + \cdots + a_n}{n} \end{aligned}$$

ここで (17) を書き換えると $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{A}{n} + \frac{n - N_1}{n} (\alpha - \varepsilon) &< s_n < \frac{A}{n} + \frac{n - N_1}{n} (\alpha + \varepsilon) \\ \frac{A - N_1 \alpha}{n} - \frac{n - N_1}{n} \varepsilon &< s_n - \alpha < \frac{A - N_1 \alpha}{n} + \frac{n - N_1}{n} \varepsilon \\ \therefore \frac{A - N_1 \alpha}{n} - \varepsilon &< s_n - \alpha < \frac{A - N_1 \alpha}{n} + \varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

さらに、 $N_2 = \max \left\{ \frac{|A - N_1 \alpha|}{\varepsilon}, N_1 \right\}$ とすると、 N_2 以上の任意の番号 n について

$$\begin{aligned} n \geq N_2 &\geq \frac{|A - N_1 \alpha|}{\varepsilon} \\ -\varepsilon &\leq \frac{A - N_1 \alpha}{\varepsilon} \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (19)$$

$$\therefore |s_n - \alpha| < 2\varepsilon \quad (\because (18), (19))$$

ε は任意であったので、 2ε も任意の正の数となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

である。

(問題の解答終わり)

$\varepsilon - \delta$ 論法に慣れてくると、上の証明の書き方はもっと簡略した書き方になります。それはいずれ皆さんが数学書と呼ばれる本を読むと出会いますが、ここではそれは示さず、先に話を進めます。ここまできると区間縮小法の証明はすぐです。今一度区間縮小法がどんなものだったか確認しておきましょう。

【区間縮小法】

閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \dots$) において、次の (i), (ii) が成り立っているとする。

(i) 各区間 I_n はその前の区間 I_{n-1} に含まれる (つまり, $a_{n-1} \leq a_n, b_n \leq b_{n-1}$)。

(ii) 区間の幅 $b_n - a_n$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$

このとき、これらの各区間に含まれる共通な要素がただ一つ存在する。その要素を α とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ である。

でした。お待たせしました。区間縮小法を証明しましょう。

(区間縮小法の証明)

数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列で, b_1 は上界になっており、数列 $\{b_n\}$ は単調減少数列で, a_1 は下界になっている。よって、有界数列の定理より、数列 $\{a_n\}$ 及び数列 $\{b_n\}$ は極限値を持つ。その極限値を α, β とする ($a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$)。このとき、任意の自然数 n について, $b_n - a_n \geq \beta - \alpha \geq 0$ が成り立つ。そして (2) より $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ なので $\alpha = \beta$ である。よって、区間縮小法は証明された。…………… (証明終わり)

ここで、関数の収束についてもその定義を“ $\varepsilon - \delta$ ”を使った定義を見ておきましょう (ひょっとしてこんな風に定義するのかな、と次を読む前に自分で想像してみるのも良い練習ですよ)。

—— 関数の収束・極限 (値) の定義 ——

$f(x)$ を関数, a, α を実数とする。任意の正の数 ε に対し、正の数 δ が存在し、 $0 < |x - a| < \delta$ を満たすどんな x についても

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立っているとする。このとき、 x を a に限りなく近づけたとき $f(x)$ は α に収束する、または $f(x)$ の極限は α であると言い、次のように表す。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

“ $\varepsilon - \delta$ ” 論法、という言葉の由来がこれでわかりましたね。

4 (再考) デデキントの切断

デデキントは“有理数しか知らない世界に住んでいる人が、自分たちの有理数の世界の様々なことを変更することなく、実数の世界を建設するか”という課題に対して回答を与えました。回答に用いたのがデデキントの切断なのですが、これまでに見てきた実数全体 $\mathbb{R}$ の切断とは少し違います。それを見ていきましょう。詳しい証明等は慣れていないとかなり酷（退屈 or 難しい）なものになるかと思うので、完全な証明はせずにストーリーをお話しします。流れのままに景色を楽しむ川下り遊覧の気分で読んで下さい。

デデキントは有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ に切断を考えました（実数全体 $\mathbb{R}$ の切断のときの記号や用語をそのままここでも使います）。

4.1 有理数の世界から実数の世界へ

ここから先に進むときのキーポイントは、『有理数しか知らない、無理数なんて存在を知らない』、というのが合い言葉です。 (A, B) を $\mathbb{Q}$ でのデデキントの切断とします。つまり、次の条件を満たしています。

$$\begin{aligned} A \subset \mathbb{Q}, B \subset \mathbb{Q} \quad , \quad A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \\ \mathbb{Q} = A \cup B, A \cap B = \emptyset \\ a \in A, b \in B \implies a < b \end{aligned}$$

実数の連続性の所 (p.9) で切断には3タイプ：【 跳び 】，【 途切れ 】，【 連続 】があり、実数の切断では【 連続 】のタイプしかない。有理数の切断には【 途切れ 】のタイプがある。この事実を実数の連続性と呼んでいる、という話をしました。また、その中で $\mathbb{Q}$ の切断には【 途切れ 】のタイプがあることを (15) を例として示しました（次に再掲）

$$\begin{aligned} A' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 3 \text{ または } x \leq 0\} \\ B' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 > 3 \text{ かつ } x > 0\} \end{aligned} \tag{20}$$

この A' や B' ですが、

$$\begin{aligned} A' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \leq \sqrt{3}\} \\ B' &= \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > \sqrt{3}\} \end{aligned} \tag{21}$$

とすれば簡単なのに、なんでこんな面倒な書き方したんだろう？ と思いませんでしたか。有理数しか知らない人には (21) の A', B' は理解できない集合です。

デデキントは $\mathbb{Q}$ の切断 (A, B) を実数と呼ぶことにしました。『えっ！ 集合のペアが数？』と思うかも知れません。ギリシャの頃の人もしっと『えっ！ 自然数のペアが

数?』と思ったでしょうねえ. 有理数の切断 (A, B) を数と思うことにし, デデキントは有理数の切断 (A, B) と (C, D) があったときに, この2つの数 (A, B) と (C, D) の和・差・積・商をどう決めるか, 2つの数の大小やイコールをどう決めるか, を定義しました. そして, さらに $\mathbb{Q}$ の切断としてあり得る2タイプ【連続】, 【途切れ】を使って次のように定義しました.

—— 有理数から実数へ ——

実数を次の2種類に分類する

有理数

切断が【連続】タイプの数, 切断には境界 s が存在する ($s \in \mathbb{Q}$).

この切断をこれまで扱ってきた有理数 s だと思い, 同一視する.

無理数

切断が【途切れ】タイプの数.

これまで自分たちの扱わなかった (有理数以外の) 数.

このように決めると, ギリシャの時代から2000年間うやむやの状態のまま使ってきた実数の計算や大小関係等様々な性質がそのまま成り立ち, それまで人類が得てきた数学の定理・性質・法則を書き換えることなく安心して使えるようになったのです.

この後, 『実数論』や『コーシー列・完備性』という話が続きます

今回はここまでです. 乞うご期待

coming soon !