

第1章 解答

【基本問題】

- 1.1. (1) $10 \text{ mm} \times \frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}} = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$
- (2) $50 \mu\text{g} \times \frac{1 \text{ g}}{10^6 \mu\text{g}} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = 5.0 \times 10^{-8} \text{ kg}$
- (3) $720 \text{ km/h} = \frac{720 \text{ km}}{1 \text{ h}} \times \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{720 \times 10^3 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}}$
 $= 2.0 \times 10^2 \text{ m/s}$
- (4) 8.0 g/cm^3
 $= \frac{8.0 \text{ g}}{1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}} \times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} \times \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \times \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \times \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}}$
 $= \frac{8.0 \times 10^6 \text{ kg}}{10^3 \text{ m}^3} = 8.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- 1.2. (1) 「速度」=「位置の変化」÷「時間」= $[L]/[T] = [LT^{-1}]$
- (2) 「加速度」=「速度の変化」÷「時間」= $[LT^{-1}]/[T] = [LT^{-2}]$
より
「力」=「質量」×「加速度」= $[M][LT^{-2}] = [LMT^{-2}]$
- (3) 「体積」=「長さ」×「長さ」×「長さ」= $[L][L][L] = [L^3]$ より
「質量体積密度」=「質量」÷「体積」= $[M]/[L^3] = [L^{-3}M]$
- (4) 「運動量」=「質量」×「速度」= $[M][LT^{-1}] = [LMT^{-1}]$
- (5) 「仕事」=「距離」×「力」= $[L][LMT^{-2}] = [L^2MT^{-2}]$
- (6) 「面積」=「長さ」×「長さ」= $[L][L] = [L^2]$ より
「圧力」=「力」÷「面積」= $[LMT^{-2}]/[L^2] = [L^{-1}MT^{-2}]$
- (7) 「力積」=「力」×「時間」= $[LMT^{-2}][T] = [LMT^{-1}]$
- 1.3. 距離 r の次元式は $[L]$, 質量 M, m の次元式は $[M]$, 力 F の次元式は $[LMT^{-2}]$ である. 万有引力定数は

$$G = \frac{Fr^2}{Mm}$$

なので, その次元式は

$$[LMT^{-2}][L][L]/([M][M]) = [L^3M^{-1}T^{-2}]$$

である. したがって, SI 単位は $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ である.

- 1.4. (1) 正しくない. 左辺の次元式は $[L]$, 右辺は「長さ」を「長さ」で割っていて無次元となっている.

- (2) 正しくない. 右辺において次元式が $[LT^{-1}]$ のものと $[T]$ のものを足すことはできない.
- (3) 正しくない. 左辺の次元式は $[L^{-3}M]$ であるのに対し, 右辺の次元式は $[M]/([L][L]) = [L^{-2}M]$ である.
- (4) 正しい. 左辺の次元式は $[M][LT^{-1}][LT^{-1}] = [L^2MT^{-2}]$ で, 右辺の次元式は $[M][LT^{-1}][L]/[T] = [L^2MT^{-2}]$ であり, 左辺と右辺の次元が等しい.

1.5. 平均の速さは $\frac{4.1\text{ m} - 2.5\text{ m}}{2.0\text{ s} - 1.2\text{ s}} = \frac{1.6\text{ m}}{0.8\text{ s}} = 2.0\text{ m/s}$ である.

1.6. 平均の加速度は $\frac{2.45\text{ m/s} - 1.96\text{ m/s}}{0.25\text{ s} - 0.20\text{ s}} = \frac{0.49\text{ m/s}}{0.05\text{ s}} = 9.8\text{ m/s}^2$ である.

- 1.7. ここでは復習として, 等加速度直線運動の公式を用いて解いてみる. 位置 x の正の向きを鉛直上向きとすると, 重力は x 軸の負の向きに働くので, 重力加速度の大きさを $g = 9.8\text{ m/s}^2$ として, 加速度は $a = -g$ とすればよい. さらに, 発射時刻を $t = 0\text{ s}$, 初期位置を $x_0 = 0\text{ m}$, 初速度を $v_0 = 10\text{ m/s}$ とすれば, 打ち上げから t 秒後の速度 v と位置 x は

$$v = -gt + v_0, \quad x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

と表される. これらの式に $t = 1.0\text{ s}$ を代入すれば, 求める速度と高さ (位置) は

$$\text{速度: } v = -9.8\text{ m/s}^2 \times 1.0\text{ s} + 10\text{ m/s} = 0.2\text{ m/s}$$

$$\text{高さ: } x = -\frac{1}{2} \times 9.8\text{ m/s}^2 \times (1.0\text{ s})^2 + 10\text{ m/s} \times 1.0\text{ s} = 5.1\text{ m}$$

となる.

- 1.8. 問題 1.7 と同様に等加速度直線運動の公式を用いて解いてみるが, この問題は自由落下の問題であるので, 鉛直下向きを位置 x の正の向きとして解く. 重力は x 軸の正の向きに働くので, 加速度は $a = g$ とすればよい. さらに, 発射時刻を $t = 0\text{ s}$, 初期位置を $x_0 = 0\text{ m}$, 初速度を $v_0 = 0\text{ m/s}$ とすれば, 落下開始から t 秒後の速度 v と位置 x は

$$v = gt, \quad x = \frac{1}{2}gt^2$$

と表される. 高さ h からの落下の場合, 地面に着くとき $x = h$ で

あるので、その時刻を位置の式から求めると

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

であり、また、そのときの速度は

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

である。これらの式に $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $h = 634 \text{ m}$ を代入して

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 634}{9.8}} \text{ s} \approx 11 \text{ s}$$

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 634} \text{ m/s} \approx 1.1 \times 10^2 \text{ m/s}$$

を得る。

1.9. 適切でないのは「エ」と「キ」である。

「エ」は「加速度」を「速度」に直せば適切になる。

「キ」は「加速度」を「変位」に直せば適切になる。

1.10. 速度 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}t + 2$, 加速度 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2}$

1.11. ① $\frac{dy}{dt} = v_0 - gt$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

② $\frac{dy}{dt} = -ma \sin(mt) + nb \cos(nt)$,

$\frac{d^2y}{dt^2} = -m^2a \cos(mt) - n^2b \sin(nt)$

1.12. 時刻 t と位置 x との関係式

$$x(t) = t^2 + 2t - 5 \text{ [m]}$$

を t で微分して、速度の式

$$v(t) = 2t + 2 \text{ [m/s]}$$

を、これをさらに t で微分して、加速度の式

$$a(t) = 2 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

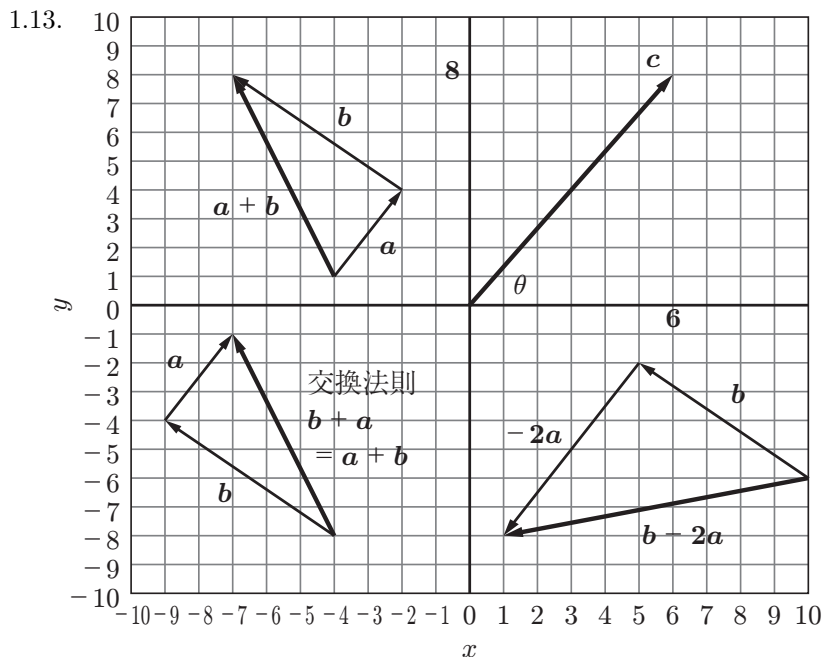
を得る。

(1) $x(t)$ に $t = 1.0 \text{ s}$ を代入して -2 m を得る。

(2) $v(t)$ に $t = 2.0 \text{ s}$ を代入して 6 m/s を得る。

(3) $v(t)$ に $t = 1.0 \text{ s}$ を代入すると 4 m/s で、 $t = 4.0 \text{ s}$ を代入すると 10 m/s であるので、この間の速度の変化は $10 \text{ m/s} - 4 \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$ である。

- (4) いま $a(t)$ は定数関数であるので, t の値に関わらず加速度は 2 m/s^2 である.
- (5) 加速度が一定であるので, 速度は時間経過とともに一定の割合で増加する.
- (6) この問題における物体の運動は等加速度直線運動である.



- (1) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ より,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \\ &= (2 - 5)\mathbf{i} + (3 + 4)\mathbf{j} \\ &= -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b} - 2\mathbf{a} &= (-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) - 2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= (-5 - 4)\mathbf{i} + (4 - 6)\mathbf{j} \\ &= -9\mathbf{i} - 2\mathbf{j}\end{aligned}$$

である. これらを図中に記した.

- (2) 図より, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ なので, 大きさは

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

である. また,

$$\tan \theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

より, 角度は

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.93 \text{ rad } (\approx 53^\circ)$$

である.

1.14. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ に対して計算する.

$$(1) \quad 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 3(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = (4 - 3)\mathbf{i} + (2 + 9)\mathbf{j} \\ = \mathbf{i} + 11\mathbf{j}$$

$$(2) \quad -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = -(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + 2(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = (-2 - 2)\mathbf{i} + (-1 + 6)\mathbf{j} \\ = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

より

$$|-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

(3) スカラー積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 1$$

である. $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の大きさをそれぞれ求めると

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

となるので, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とのなす角 θ に対して,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

より

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

を得る.

1.15. 2つのベクトルが直交するとき, それらのスカラー積はゼロとなる.

(1) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ のスカラー積がゼロになるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (x\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= x \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\ &= -x + 14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. これより

$$x = 14$$

を得る.

- (2) $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ のスカラー積がゼロになるので,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) \\ &= (-2) \cdot 4 + 3 \cdot y + (-1) \cdot (-5) \\ &= 3y - 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

である。これより

$$y = 1$$

を得る。

【発展問題】

- 1.16. 速度 $v = \frac{a}{(1+bt)}$ から, 加速度 α が v^2 に比例することを示す。

$$T = 1 + bt \text{ と置くと, } v = \frac{a}{T} \text{ であり,}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dv}{dT} \\ &= \frac{d}{dt}(1+bt) \cdot \frac{d}{dT}\left(\frac{a}{T}\right) \\ &= b\left(-\frac{a}{T^2}\right) \\ &= -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{T}\right)^2 \\ &= -\frac{b}{a}v^2\end{aligned}$$

である。よって, α が v^2 に比例することが示された。また, $t = 0$ のとき

$$v = \frac{a}{(1+b \cdot 0)} = a$$

であるので, 定数 a は初速を意味している。

- 1.17. $v = -\frac{1}{4}t^2 + 2t$ より, 加速度 $a(t)$ は v を t で微分して,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{4}t^2 + 2t\right) = -\frac{1}{2}t + 2 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

と表される。よって, $t = 2.0 \text{ s}$ のときの加速度は

$$a = 1.0 \text{ m/s}^2$$

である。また、移動距離 $x(t)$ は v を t で積分して、

$$x(t) = \int v dt = \int \left(-\frac{1}{4}t^2 + 2t \right) dt = -\frac{1}{12}t^3 + t^2 + C$$

と表される。ここで C は積分定数であるが、 $t = 0$ s のとき $x(0) = 0$ m とすると $C = 0$ となるので、

$$x(t) = -\frac{1}{12}t^3 + t^2$$

を得る。よって、 $t = 2.0$ s のときの移動距離は

$$x = \frac{10}{3} \text{ m } (\approx 3.3 \text{ m})$$

である。

1.18. $v = 1.5$ s より、加速度は v を t で微分して

$$a = \frac{dv}{dt} = 1.5 \frac{ds}{dt} = 1.5v = 1.5 \cdot 1.5 \text{ s} = 2.25 \text{ s} \quad [\text{m/s}^2]$$

を表される。したがって、 $s = 10$ m 移動したときの加速度は

$$a = 2.25 \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 22.5 \text{ m/s}^2$$

である。

1.19. 物体が加速度 a で等加速度直線運動をしているとすると、速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} v(t) &= at + C_1 \\ x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2 \end{aligned}$$

と表される。 C_1 , C_2 は積分定数である。ここで、点 A の位置を $x = 0$ とし、物体が点 A を通過した時刻を $t = 0$ 、そのときの速度を v_0 とすると

$$\begin{aligned} v(0) &= a \cdot 0 + C_1 = v_0 \\ x(0) &= \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{aligned}$$

より、 $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ を得る。よって

$$\begin{aligned} v(t) &= at + v_0 \\ x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t \end{aligned}$$

である。物体が止まった時刻を t_1 、そのときの物体の位置を x_1 とすると、

$$v(t_1) = at_1 + v_0 = 0 \quad (1)$$

$$x(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 = x_1 \quad (2)$$

である。式(1)より $t_1 = -\frac{v_0}{a}$ を得るので、これを式(2)に代入すると

$$\frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a} = x_1$$

より

$$v_0 = \sqrt{-2ax_1}$$

を得る。 $a = -2 \text{ m/s}^2$, $x_1 = 16 \text{ m}$ を代入して、求める速度は

$$v_0 = \sqrt{-2 \cdot (-2 \text{ m/s}^2) \cdot 16 \text{ m}} = 8 \text{ m/s}$$

である。

- 1.20. 図は、運動の様子を v - t 図に書いたものである。 v - t 線と t 軸とに囲まれた面積が移動距離 x になるので

$$x = \frac{1}{2}v_0 \times (2t_0)$$

であり、これより

$$v_0 = 2\frac{x}{(2t_0)}$$

を得る。ここで $2t_0 = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$, $x = 15 \text{ km} = 1.5 \times 10^4 \text{ m}$ であるので、求める最大速度は

$$v_0 = 2 \times \frac{1.5 \times 10^4 \text{ m}}{600 \text{ s}} = 50 \text{ m/s}$$

である。

- 1.21. 加速度 $a(t) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{20}} [\text{m/s}^2]$ より、これを t で積分して速度は

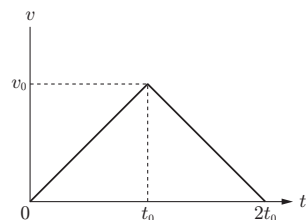
$$v(t) = \int a dt = \int \left(-\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{20}}\right) dt = 4e^{-\frac{t}{20}} + C [\text{m/s}]$$

と表される。ここで、 C は積分定数であるが、 t が十分に大きいときには速度が 2.0 m/s になることから $C = 2.0 \text{ m/s}$ である。よって

$$v(t) = 4e^{-\frac{t}{20}} + 2.0 [\text{m/s}]$$

を得る。初めの速度はこの式に $t = 0 \text{ s}$ を代入して 6.0 m/s であるので、半分の速さになるのは

$$\frac{6.0}{2} = 4e^{-\frac{t}{20}} + 2.0 [\text{m/s}]$$



を満たす t のときである。これを t について解くと

$$e^{-\frac{t}{20}} = \frac{1}{4}$$

より

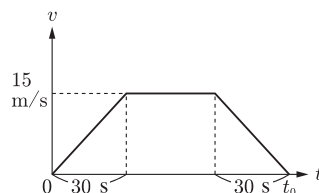
$$-\frac{t}{20} = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

となるので

$$t = -20 \ln\left(\frac{1}{4}\right) \text{ s} = 20 \ln 4 \text{ s} \approx 28 \text{ s}$$

を得る。

- 1.22. 図は、最小時間で走る場合の v - t 図を書いたものである。このとき、発着時の加速度の大きさは 0.5 m/s^2 であるので、速度ゼロから最大速度、または、最大速度から速度ゼロになるまでの時間は 30 s である。到着する時間を t_0 とすると図で速度を表す折れ線と t 軸で囲まれた面積が移動距離 $5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$ であるので、



$$\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 \text{ m} + (t_0 - 30 \text{ s} - 30 \text{ s}) \cdot 15 \text{ m/s} + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15 \text{ m} = 5000 \text{ m}$$

である。これを t_0 について解くと

$$t_0 = \left(\frac{5000 - 225 - 225}{15} + 60 \right) \text{ s} \approx 363 \text{ s}$$

を得る。よって、求める最小時間は約 6 分 3 秒である。

- 1.23. 等加速度直線運動のときの速度 $v(t)$ は、加速度を a 、初速度を v_0 として $v(t) = at + v_0$ で表される。 $a < 0$ とすると停止するまでの時間 t_1 は $0 = at_1 + v_0$ より

$$t_1 = -\frac{v_0}{a}$$

である。また、このときの位置 $x(t)$ は、初期位置を $x = 0$ とすると、 $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ で表される。ここに $t = t_1$ を代入すると、停止するまでに進む距離 s は

$$s = x(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 = \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

となる。この式に $v_0 = 80 \text{ km/h} = \frac{80 \times 1000}{3600} \text{ m/s}$, $a = -0.80 \text{ m/s}^2$ を代入して

$$s = \frac{25000}{81} \text{ m} \approx 3.1 \times 10^2 \text{ m}$$

を得る。 $3.1 \times 10^2 \text{ m}$ より前で危険物を認めれば安全である。

1.24. $v(t) = t^3 - 3t^2 - 6t$ より, これを t で積分して, 移動距離は

$$x(t) = \int v dt = \int (t^3 - 3t^2 - 6t) dt = \frac{1}{4}t^4 - t^3 - 3t^2 + C$$

と表される. ここで C は積分定数であるが, $t = 0$ のとき $x = 0$ とすると $C = 0$ となる. よって

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 - 3t^2$$

を得る. 出発点は $x = 0$ のときなので,

$$\frac{1}{4}t^4 - t^3 - 3t^2 = 0$$

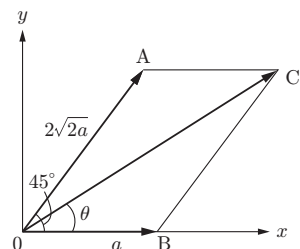
の解の中に求めたい時刻がある. この方程式を式変形すると

$$t^2 \left(\frac{1}{4}t^2 - t - 3 \right) = 0$$

で, $t = 0$ は出発時刻であるので, $\frac{1}{4}t^2 - t - 3 = 0$ を解くと $t = -2$ または $t = 6$ を得る. 出発してから何秒後に出発点に戻るかという問題であるので, 答えは 6 秒後である.

1.25. 図のように x - y 座標にそれぞれのベクトルを記入し, 合成ベクトル $\vec{OC}$ の x 軸からの角度を θ とする. 大きさ $2\sqrt{2}a$ と a のベクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= 2\sqrt{2}a \cos 45^\circ \mathbf{i} + 2\sqrt{2}a \sin 45^\circ \mathbf{j} = 2a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} \\ \vec{OB} &= a\mathbf{i}\end{aligned}$$



と表される. これらを合成すると

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = (2a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}) + (a\mathbf{i}) = 3a\mathbf{i} + 2a\mathbf{j}$$

となる. よって, 求めるベクトルの大きさは

$$|\vec{OC}| = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{13}a$$

である. また,

$$\tan \theta = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$$

より, 求めるベクトルは図において x 軸と

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \approx 0.59 \text{ rad } (\approx 33.7^\circ)$$

の角をなす方向である.

第2章 解答

【基本問題】

2.1. 経路は、時間 t を含まない x, y のみの式となる．速度および加速度は、 x, y それぞれの時間微分として表せる．

(a) 経路の式：

$t = \frac{x}{4}$ であるのでこれを y の式に代入し、

$$y = 4t - 8t^2 = 4\left(\frac{x}{4}\right) - 8\left(\frac{x}{4}\right)^2 = x - \frac{1}{2}x^2$$

を得る．

速度：

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = 4 \\v_y &= \frac{dy}{dt} = 4 - 16t\end{aligned}$$

加速度：

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{dv_x}{dt} = 0 \\a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -16\end{aligned}$$

(b) 経路の式：

加法定理より $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ である．

さらに $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ を使って変形すると、

$$y = \cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$$

である．ここで $\sin t = x$ を代入し、

$$y = 1 - 2x^2$$

を得る．

速度：

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = \cos t \\v_y &= \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t\end{aligned}$$

加速度：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\sin t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4 \cos 2t$$

(c) 経路の式：

$\cos nt = \frac{x}{a}$, $\sin nt = \frac{y}{b}$ である. また, $\sin^2 nt + \cos^2 nt = 1$ であることを使い,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

を得る.

速度：

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -an \sin nt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = bn \cos nt$$

加速度：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -an^2 \cos nt$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -bn^2 \sin nt$$

$$2.2. (a) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(t^2 + 2t)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (2t + 2)\mathbf{j}$$

$$= 2\mathbf{i} + 2(t + 1)\mathbf{j}$$

$$(b) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(2t + 2)\mathbf{j} = 0 \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{j} = 2\mathbf{j}$$

$\mathbf{a}$ は y 成分のみであるため, y 軸に平行である.

(c) $\mathbf{r}$ は $x = 2t$, $y = t^2 + 2t$ とかける. $t = \frac{x}{2}$ であることから,

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + x$$

を得る.

2.3. (a) 合成関数の微分と加法定理により,

$$\frac{d}{dt} \cos^2(t) = -2 \sin(t) \cos(t) = -\sin(2t) \text{ である.}$$

よって,

$$\mathbf{v} = \frac{d \sin(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{d \cos^2(t)}{dt} \mathbf{j} = \cos(t) \mathbf{i} - 2 \sin(t) \cos(t) \mathbf{j}$$

$$= \cos(t) \mathbf{i} - \sin(2t) \mathbf{j}$$

を得る.

- (b) $\mathbf{a} = \frac{d \cos(t)}{dt} \mathbf{i} - \frac{d \sin(2t)}{dt} \mathbf{j} = -\sin(t) \mathbf{i} - 2 \cos(2t) \mathbf{j}$
 (c) $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ であることから, y の式は以下のように変形できる.

$$y = \cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$$

これに $x = \sin(t)$ を代入すれば, 求める経路の式は,

$$y = 1 - x^2$$

となる.

- 2.4. (a) $t = x^{\frac{1}{2}}$ であるので,

$$y = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}$$

を得る. あるいは上式の両辺を 2 乗して,

$$y^2 = x^3$$

でもよい.

- (b) 位置 $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}$ であるので,
 速度 $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} t^2 \mathbf{i} + \frac{d}{dt} t^3 \mathbf{j} = 2t \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j}$
 加速度 $\mathbf{a} = \frac{d}{dt} 2t \mathbf{i} + \frac{d}{dt} 3t^2 \mathbf{j} = 2 \mathbf{i} + 6t \mathbf{j}$

である. これらの式に $t = 2.0 \text{ s}$ を代入し, 2.0 秒後の速度, 加速度, 位置を求めると,

$$\mathbf{v} = (4.0 \text{ m/s}, 12 \text{ m/s}), \quad \mathbf{a} = (2.0 \text{ m/s}^2, 12 \text{ m/s}^2),$$

$$\mathbf{r} = (4.0 \text{ m}, 8.0 \text{ m})$$

となる. また, 原点を出発してから 2.0 秒間の移動距離 L は, 以下のように求められる.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 v \, dt = \int_0^2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = \int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt \\ &= \int_0^2 t \sqrt{4 + 9t^2} dt \end{aligned}$$

ここで, $4 + 9t^2 = T$ とおき, 置換積分すると,

$$\begin{aligned} L &= \int_4^{40} \frac{1}{18} T^{\frac{1}{2}} dT = \left[\frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}} \right]_4^{40} = \frac{1}{27} \left(40^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) \\ &\approx 9.073 \dots \approx 9.1 \text{ m} \end{aligned}$$

- 2.5. 車 A から車 B を見たときの相対速度を求める問題であるので、それぞれの場合で $v_B - v_A$ を計算すればよく、一直線上の運動なので、スカラー量の引き算でよい。車 A の進行方向に A から B に向かう向きを正の向きとすると、以下のように求められる。

(a) の正面衝突（右図の上）の場合：

$$v_B - v_A = (-40) - 60 = -100$$

したがって、A から見た B の速度は、A に近づく向きに、大きさ 100 [km/h] である。

(b) の追突（右図の下）の場合：

$$v_B - v_A = 40 - 60 = -20$$

したがって、A から見た B の速度は、A に近づく向きに、大きさ 20 [km/h] である。

- 2.6. それぞれ、電車は地面、飛行機は大気、船は水、ロケットは地面または地球、ロケットの噴出ガスはロケット、風は地面、川の流れは地面または岸、落体は地面に対する速度である。

$$2.7. \omega = \frac{v}{r} = \frac{0.30}{0.15} = 2.0 \text{ [rad/s]}$$

$$2.8. \text{加速度的大きさ} : a = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.20} = 500 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

加速度的向き：円の中心方向

- 2.9. (a) 1 周回ったときの変位角は 2π であるので、この運動の角速度

$$\text{は } \omega = \frac{2\pi}{12.0 \text{ s}} = \frac{\pi}{6.00} \text{ [rad/s] である.}$$

$$v = r\omega \text{ より,}$$

$$v = 1.00 \times \frac{\pi}{6.00 \text{ s}} = \frac{\pi}{6.00} \text{ [m/s]} \approx 0.524 \text{ [m/s]}$$

- (b) 東にいた時刻を $t = 0.0 \text{ [s]}$ とし、 $\omega_0 = 0 \text{ [rad]}$ とする。

この質点の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は次のように表すことができる。

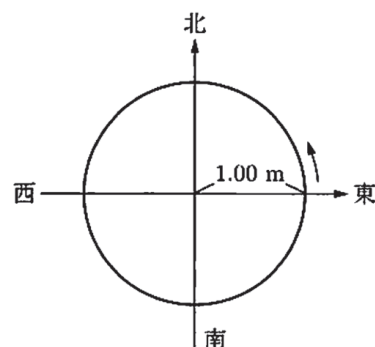
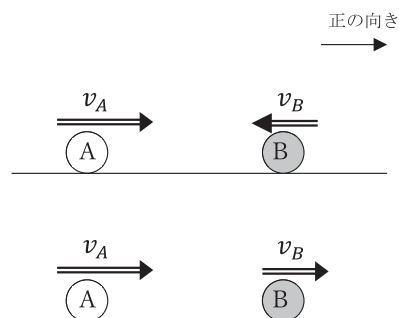
$$\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t))$$

よって、速度ベクトル $\mathbf{v}$ は次のようになる。

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-r\omega \sin(\omega t), r\omega \cos(\omega t))$$

$t = 3.0 \text{ s}$ のとき、

$$v_x = -1.00 \times \frac{\pi}{6.00} \times \sin\left(\frac{\pi}{6.00} \times 3.0\right) = -\frac{\pi}{6.00} \times 1.0$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{\pi}{6.00} [\text{m/s}] \approx -0.52 [\text{m/s}] \\
v_y &= 1.00 \times \frac{\pi}{6.00} \times \cos\left(\frac{\pi}{6.00} \times 3.0\right) \\
&= \frac{\pi}{6.00} \times 0.0 = 0.0 [\text{m/s}]
\end{aligned}$$

y 成分が 0 であることから, 西向きに $0.52 [\text{m/s}]$ である.

$t = 6.0 [\text{s}]$ のとき,

$$\begin{aligned}
v_x &= -1.00 \times \frac{\pi}{6.00} \times \sin\left(\frac{\pi}{6.00} \times 6.0\right) \\
&= -\frac{\pi}{6.00} \times 0.0 = -0.0 [\text{m/s}] \\
v_y &= 1.00 \times \frac{\pi}{6.00} \times \cos\left(\frac{\pi}{6.00} \times 6.0\right) = \frac{\pi}{6.00} \times (-1.0) \\
&= -\frac{\pi}{6.00} [\text{m/s}] \approx -0.52 [\text{m/s}]
\end{aligned}$$

x 成分が 0 であることから, 南向きに $0.52 [\text{m/s}]$ である.

- (c) 平均加速度は $\bar{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{\Delta t} = \left(\frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t}, \frac{v_y - v_{0y}}{\Delta t} \right)$ より得られる.

ここで, $t = 0.0 [\text{s}]$ のときの $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ を $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$ とした.

速度ベクトル $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-r\omega \sin(\omega t), r\omega \cos(\omega t))$ より,

$$\begin{aligned}
v_{0x} &= -1.00 \times \frac{\pi}{6.00} \times \sin\left(\frac{\pi}{6.00} \times 0.0\right) = 0.0 [\text{m/s}] \\
v_{0y} &= 1.00 \times \frac{\pi}{6.00} \times \cos\left(\frac{\pi}{6.00} \times 0.0\right) = \frac{\pi}{6.00} [\text{m/s}]
\end{aligned}$$

である. したがって, (b) の結果を利用すると, $t = 0.0 [\text{s}]$ から $3.0 [\text{s}]$ の間では,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} = \frac{-\frac{\pi}{6.00} - 0.0}{3.0} = -\frac{\pi}{18} [\text{m/s}^2] \approx -0.17 [\text{m/s}^2] \\
\bar{a}_y &= \frac{v_y - v_{0y}}{\Delta t} = \frac{-0.0 - \frac{\pi}{6.00}}{3.0} = -\frac{\pi}{18} [\text{m/s}^2] \approx -0.17 [\text{m/s}^2]
\end{aligned}$$

である. また, この平均加速度の大きさは,

$$\bar{a} = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{18}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{18} [\text{m/s}^2] \approx 0.25 [\text{m/s}^2]$$

なので, 南西向きに $0.25 [\text{m/s}^2]$ である.

$t = 0.0 [\text{s}]$ から $6.0 [\text{s}]$ の間では,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} = \frac{-0.0 - 0.0}{6.0} = 0.0 [\text{m/s}^2] \\
\bar{a}_y &= \frac{v_y - v_{0y}}{\Delta t} = \frac{-\frac{\pi}{6.00} - \frac{\pi}{6.00}}{6.0} = -\frac{\pi}{18} [\text{m/s}^2] \approx -0.17 [\text{m/s}^2]
\end{aligned}$$

である。また、この平均加速度の大きさは、

$$\bar{a} = \sqrt{0.0^2 + \left(-\frac{\pi}{18}\right)^2} = \frac{\pi}{18} [\text{m/s}^2] \approx 0.17 [\text{m/s}^2] \text{ なので、南向きに } 0.17 [\text{m/s}^2] \text{ である。}$$

$$2.10. (a) \text{ 周期: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2.0} = \pi [\text{s}] \approx 3.1 [\text{s}]$$

$$\text{振動数: } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} [\text{Hz}] \approx 0.32 [\text{Hz}]$$

$$(b) \text{ 角振動数: } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.020} = 100\pi [\text{rad/s}] \approx 3.1 \times 10^2 [\text{rad/s}]$$

$$\text{振動数: } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.020} = 50 [\text{Hz}]$$

$$2.11. \text{ 角振動数: } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{振動数: } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

【発展問題】

2.12. $s = 15t - 2t^2 = -2\left(t - \frac{15}{4}\right)^2 + \frac{225}{8}$ であるので、この経路の長さ（移動距離）を図示すると右図のようになる。

平均の速さは $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ より得られる。

$$t = 2.00 [\text{s}] \text{ のとき, } s = 15 \times 2.00 - 2 \times 2.00^2 = 22.0 [\text{m}]$$

$$1 \text{ 秒後の } t = 3.00 [\text{s}] \text{ のとき, } s = 15 \times 3.00 - 2 \times 3.00^2 = 27.0 [\text{m}]$$

$$0.5 \text{ 秒後の } t = 2.50 [\text{s}] \text{ のとき, } s = 15 \times 2.50 - 2 \times 2.50^2 = 25.0 [\text{m}]$$

である。よって、 $t = 2.00 [\text{s}]$ から $3.00 [\text{s}]$ の間の平均の速さは、

$$\bar{v} = \frac{27.0 - 22.0}{3.00 - 2.00} = 5.00 [\text{m/s}]$$

であり、 $t = 2.00 \text{ s}$ から 2.50 s の間の平均の速さは、

$$\bar{v} = \frac{25.0 - 22.0}{2.50 - 2.00} = 6.00 [\text{m/s}]$$

である。

瞬間の速さは、

$$v = \frac{ds}{dt} = 15 - 4t$$

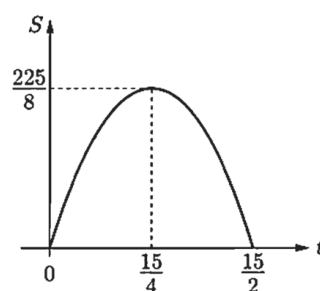
で表せるので、これに $t = 2.00 \text{ s}$ を代入することで

$$v = 15 - 4 \times 2.00 = 7.00 [\text{m/s}]$$

を得る。

2.13. B から見た A の相対速度 $\boldsymbol{v}_{AB}$ は

$$\boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B$$



である。右図のように、東向きを x 軸の正の向き、北向きを y 軸の正の向きにとり、それぞれの速度ベクトルを成分ごとに表すと、

$$\boldsymbol{v}_A = (0, -40)$$

$$\boldsymbol{v}_B = (60 \cos 135^\circ, 60 \sin 135^\circ) = \left(-\frac{60}{\sqrt{2}}, \frac{60}{\sqrt{2}}\right)$$

であるので、相対速度 $\boldsymbol{v}_{AB}$ は

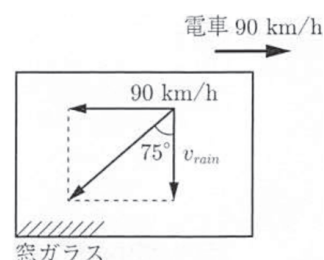
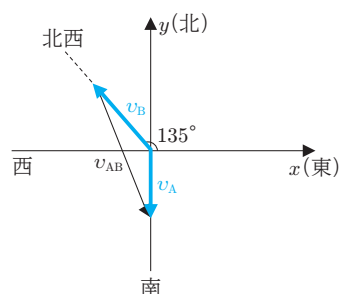
$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{AB} &= \left(0 - \left(-\frac{60}{\sqrt{2}}\right), -40 - \frac{60}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{60}{\sqrt{2}} [\text{km/h}], -\frac{40\sqrt{2} + 60}{\sqrt{2}} [\text{km/h}]\right) \\ &\approx (42 [\text{km/h}], -82 [\text{km/h}])\end{aligned}$$

となる。

2.14. 雨滴の鉛直落下速度を v_{rain} [km/h] で表すと、

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{90}{v_{\text{rain}}} \\ v_{\text{rain}} &= \frac{90}{\tan 75^\circ} \approx 24 [\text{km/h}]\end{aligned}$$

となる。なお、電車の速度が減ると雨滴の跡が鉛直となす角は小さくなる。



2.15. 泳ぐ速度を v_s 、水流の速度を v_w とおく。また、 v_s と岸がなす角を θ とする。

(a) 合成速度は、ちょうど川を真っ直ぐに横切る方向であるので、

v_s と v_w の関係は、右図より次のようになる。

$$\begin{aligned}v_s \cos \theta &= v_w \\ \therefore \cos \theta &= \frac{v_w}{v_s} \\ &= \frac{2.0 \text{ km/h}}{2.5 \text{ km/h}} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

ここで、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であることを使うと、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ であるので、}$$

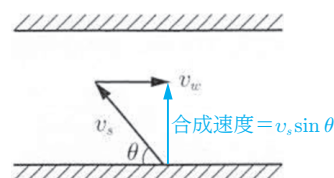
合成速度の大きさは、

$$v_s \sin \theta = 2.5 \text{ km/h} \times \frac{3}{5} = 1.5 [\text{km/h}]$$

となる。

川を渡るのにかかる時間は、

$$t = \frac{1.0 \text{ km}}{1.5 \text{ km/h}} = \frac{2}{3} [\text{h}]$$



である.

- (b) 右図のように考えると, v_s と v_w の関係は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{v_s}{v_w} \\ &= \frac{2.5 \text{ km/h}}{2.0 \text{ km/h}} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

この θ の方向に流され, 対岸にたどり着く. たどり着いた位置の真正面からの距離 (川を渡った後に歩く距離) を L とおくと, 川幅が 1.0 km であることから次の関係が成り立つ.

$$\tan \theta = \frac{1.0 \text{ km}}{L} = \frac{5}{4}$$

従って,

$$L = \frac{4}{5} [\text{km}]$$

である.

川を渡る時間は, 岸に垂直な成分の運動のみを考えれば良いので, *

$$\frac{1.0 \text{ km}}{2.5 \text{ km/h}} = \frac{2}{5} [\text{h}]$$

である. さらに, 川を渡った後に目的地まで歩くのに必要な時間は,

$$\frac{\frac{4}{5} \text{ km}}{4.0 \text{ km/h}} = \frac{1}{5} [\text{h}]$$

であるので, 合計の時間は

$$\text{川を渡る時間} + \text{歩く時間} = \frac{2}{5} \text{ h} + \frac{1}{5} \text{ h} = \frac{3}{5} [\text{h}]$$

である. (a) の場合にかかる時間と比較すると,

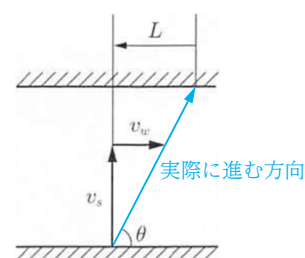
$$\frac{2}{3} \text{ h} - \frac{3}{5} \text{ h} = \frac{1}{15} [\text{h}]$$

であるので, $\frac{1}{15} [\text{h}]$ だけ速い.

2.16. 省略

2.17. それぞれの速さを, v_0, v_1, v_2 とおき, 単位を km/h から m/s に直すと次のようになる.

$$v_0 = 28 [\text{km/h}] = 7.78 [\text{m/s}]$$



* 水平な方向のみを考えても同じ結果が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{L}{v_w} &= \frac{\frac{4}{5} \text{ km}}{2.0 \text{ km/h}} \\ &= \frac{2}{5} [\text{h}]\end{aligned}$$

$$v_1 = 30 [\text{km/h}] = 8.33 [\text{m/s}]$$

$$v_2 = 34 [\text{km/h}] = 9.44 [\text{m/s}]$$

$r = 200 [\text{m}]$ であるので、それぞれの速さから角速度を求めると次のようになる。

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{7.78 \text{ m/s}}{200 \text{ m}} = 3.89 \times 10^{-2} [\text{rad/s}]$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{8.33 \text{ m/s}}{200 \text{ m}} = 4.17 \times 10^{-2} [\text{rad/s}]$$

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{9.44 \text{ m/s}}{200 \text{ m}} = 4.72 \times 10^{-2} [\text{rad/s}]$$

接線の加速度は、

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \\ &= 200 \times \frac{(4.72 - 3.89) \times 10^{-2}}{5.0} = 0.33 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

(題意より、接線の加速度は時間によらず一定であるため $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ である.)

法線の加速度は、

$$\begin{aligned} a_n &= r\omega^2 = v\omega \\ &= v_1\omega_1 = 8.33 \times 4.17 \times 10^{-2} \\ &= 0.35 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

よって、全加速度の大きさは、

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \\ &= \sqrt{0.33^2 + 0.35^2} \\ &= 0.48 [\text{m/s}^2] \end{aligned}$$

2.18. 位置ベクトル $\mathbf{r} = a \cos(\omega t)\mathbf{i} + a \sin(\omega t)\mathbf{j}$ を微分することにより速度ベクトル $\mathbf{v}$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{a \cos(\omega t)\}\mathbf{i} + \frac{d}{dt}\{a \sin(\omega t)\}\mathbf{j} \\ &= -a\omega \sin(\omega t)\mathbf{i} + a\omega \cos(\omega t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ のスカラー積は、

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = a \cos(\omega t) \cdot \{-a\omega \sin(\omega t)\} + a \sin(\omega t) \cdot a\omega \cos(\omega t)$$

$$= -a^2\omega \cos(\omega t) \sin(\omega t) + a^2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 0$$

すなわち,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = rv \cos \theta = 0$$

である. ここで, $r \neq 0, v \neq 0$ なので,

$$\cos \theta = 0$$

である. これより, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ である. したがって, $\mathbf{v}$ と $\mathbf{r}$ が直交することが示された.

$$2.19. (a) \text{ 周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\text{また, } L = 1.00 \text{ [m] のとき } T = 2 \times 3.14 \sqrt{\frac{1.00}{9.81}} \approx 2.005049 \dots \approx 2.01 \text{ [s]}$$

(b) 題意より, この単振動の角振動数は ω , 振幅は x_0 であるので, 位置 x は次式のように表される.

$$x = x_0 \cos(\omega t + \theta_0)$$

ここで, θ_0 は初期位相を表す任意定数なので, 初期条件 ($t = 0$ のとき $x = x_0$) を考慮して値を決める必要がある. この初期条件を位置 x の式に代入し,

$$x_0 = x_0 \cos(\theta_0) \quad \rightarrow \quad \cos(\theta_0) = 1 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = 0$$

である. したがって, 求める位置 x と速度 v の式は次のようになる.

$$x = x_0 \cos(\omega t) \left(= x_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \right),$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t) \left(= -x_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \right)$$

なお, この v の式は, 速度についての初期条件 ($t = 0$ のとき $v = 0$) を満たしている. また, この v の式から, 速度も単振動であり, その振幅 (つまり最大値) は $x_0 \omega \left(= x_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \right)$ であるとわかる.

第3章 解答

【基本問題】

3.1. 静止している質点に働く力の合力はゼロである。したがって、

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= (-\sqrt{2} + \sqrt{2} + x)\mathbf{i} + (1 - 3 + y)\mathbf{j} \\ &= x\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} \\ &= \mathbf{0} \quad [\text{N}]\end{aligned}$$

である。これより、

$$x = 0 \quad [\text{N}], \quad y - 2 = 0 \quad [\text{N}]$$

であり、これらを解いて

$$x = 0 \text{ N}, \quad y = 2 \text{ N}$$

を得る。

3.2. まず、合力 $\mathbf{F}$ を求め、その後、運動の第2法則から加速度 $\mathbf{a}$ を求める。つまり、

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= (-\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2)\mathbf{i} + (0 - 3 + 1)\mathbf{j} \quad [\text{N}] \\ &= 2\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} \quad [\text{N}]\end{aligned}$$

より

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{2\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j}}{5.0} \quad [\text{m/s}^2] = 0.4\mathbf{i} + (-0.4)\mathbf{j} \quad [\text{m/s}^2]$$

を得る。したがって、加速度の大きさ $|\mathbf{a}|$ は

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &= \sqrt{0.4^2 + (-0.4)^2} \text{ m/s}^2 = \frac{2\sqrt{2}}{5} \text{ m/s}^2 \approx 0.57 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

である。 x 軸からの角度 θ は

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-0.4}{0.4} = -1$$

より

$$\theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad } (= -45^\circ)$$

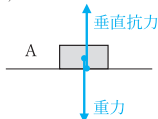
である.

3.3.

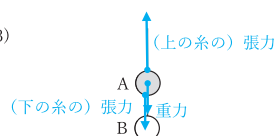
(1)



(2)



(3)



【補足】いずれの問題でも、図示するのは「物体 A に働いている力」であることに注意しよう。作用点の位置にも注意しよう。力の矢印の長さは特に指定はないが、(2) と (3) では物体 A は静止しているため合力がゼロになるよう描くのが適切である。また、(2) では重力と垂直抗力、(3) では重力と糸の張力は、同一直線上に作用線があるが、この解答例では見やすさを考慮してあえて少しずらして描かれている。

3.4. 右図の通りである。

【補足】力の矢印の長さは特に指定はないが、物体は静止しているため合力がゼロになるように描くのが適切である。

3.5. (1) $W = mg = 30 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 294 \text{ N} \approx 2.9 \times 10^2 \text{ N}$

(2) バネの自然の長さからの伸びを x とする。おもりに働く力（ばねの弾性力と重力）がつりあうことから、

$$kx = mg$$

より

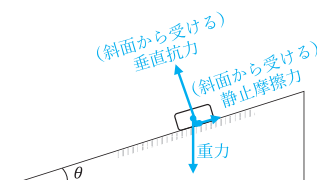
$$\begin{aligned} x &= \frac{mg}{k} = \frac{0.40 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{98 \text{ N/m}} \\ &= 4.0 \times 10^{-2} \text{ m } (= 4.0 \text{ cm}) \end{aligned}$$

である。

(3) 物体が静止している間は加える力と摩擦力はつりあっており、動き出す直前には、摩擦力は最大となる（最大摩擦力）。したがって、物体を動かすために必要な力の大きさは

$$\begin{aligned} F &= \mu N = \mu mg = 0.30 \times 30 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \\ &= 88.2 \text{ N} \approx 88 \text{ N} \end{aligned}$$

である。



- 3.6. 加速度の大きさを a ，糸の張力の大きさを T とし，鉛直上向きを正として，A, B の運動方程式を立てると

$$\text{物体 A : } m_1 a = F - m_1 g - T \quad (1)$$

$$\text{物体 B : } m_2 a = -m_2 g + T \quad (2)$$

である．式 (1), (2) を足し合わせて整理すると

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g$$

を得る．これを式 (2) に代入して整理すると

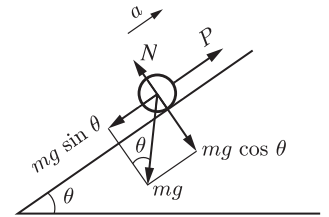
$$T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

を得る．

- 3.7. 図において加速度を斜面上向きに大きさ a ，斜面からの垂直抗力の大きさを N とすると，運動方程式は

$$\text{斜面方向} \quad : ma = P - mg \sin \theta$$

$$\text{斜面に垂直な方向} : 0 = N - mg \cos \theta$$

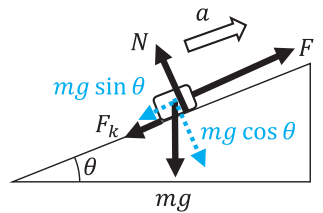


である．これらの式より

$$a = \frac{P}{m} - g \cos \theta, \quad N = mg \cos \theta$$

を得る．

- 3.8. この小物体に働く力，図にある4つの力，つまり，引き上げる力（大きさ F ），重力（大きさ mg ），垂直抗力（大きさ N ），動摩擦力（大きさ F_k ）である．斜面に沿った方向とこれに垂直な方向の2方向に運動を分けて考える．重力はこの2方向に分解し，斜面方向が $mg \sin \theta$ と斜面に垂直な方向が $mg \cos \theta$ である．まず，斜面に垂直な方向には運動は起こらないことから，この方向への物体の加速度は0であるので，斜面に垂直な方向に対して運動の第2法則を適用し



$$m \cdot 0 = N - mg \cos \theta$$

を得る．よって求める垂直抗力の大きさは

$$N = mg \cos \theta$$

である。また、斜面に沿って上向きに大きさ a の加速度が生じるとすると、斜面方向の運動の第2法則より

$$ma = F - mg \sin \theta - \mu' = F - mg(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$$

を得る。よって、求める加速度の大きさ a は

$$a = \frac{F}{m} - g(\sin \theta + \mu' \cos \theta)$$

である。

- 3.9. 自動車の質量を m 、初速度を v_0 、制動力の大きさを F とする。時間と位置の座標軸を

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{時間 } t \text{ の原点：制動力がかかり始めた（減速開始）時点} \\ \text{位置 } x \text{ の原点：減速開始位置} \\ x \text{ 軸の正の向き：制動力の向き} \end{array} \right.$$

のように設定し、自動車が停止した時刻を $t = t_1$ 、そのときの位置を $x = -s$ とする。減速開始後には、自動車には x 軸の正の向きに大きさ F の力のみが作用している。初期条件は時刻 $t = 0$ のとき、位置が $x = 0$ 、速度が $v = -v_0$ である。自動車の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

となり、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

が得られる。この式を t で積分して、速度 v は

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \int \left(\frac{F}{m} \right) dt = \frac{F}{m} t + C_1$$

となる。この式に、速度についての初期条件 $t = 0$ のとき $v = -v_0$ を代入すると、 $C_1 = -v_0$ が得られるので、速度 v は

$$v(t) = \frac{F}{m} t - v_0$$

となる。これをさらに t で積分し、位置 x は

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(\frac{F}{m} t - v_0 \right) dt = \frac{F}{2m} t^2 - v_0 t + C_2$$

となる。この式に、位置についての初期条件 $t = 0$ のとき $x = 0$ を代入すると、 $C_2 = 0$ が得られるので、位置 x は

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 - v_0t$$

となる。次に、停止するまでの走行距離 s を求める。時刻が $t = t_1$ のときに速さが $v = 0$ であることから、速度の式に代入すると、

$$\frac{F}{m}t_1 - v_0 = 0$$

となり、よって停止する時刻 t_1 は、

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}$$

である。このときの位置は、位置の式に $t = t_1$ を代入すればよく、

$$x(t_1) = \frac{F}{2m}t_1^2 - v_0t_1 = -\frac{m}{2F}v_0^2$$

となる。よって、求める走行距離 s は、

$$s = \frac{m}{2F}v_0^2$$

である。最後に具体的な数値を代入すると

求める距離

$$\begin{aligned} &= \frac{8.0 \times 10^2 \text{ kg}}{2 \times 2.0 \times 10^3 \text{ N}} \times \left(5.4 \times 10 \text{ km/h} \times \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)^2 \\ &= 4.5 \times 10 \text{ m} \end{aligned}$$

となる。

- 3.10. 鉛直下向きに y 軸をとり、投げ上げ地点を $y = 0$ 、投げ上げ時刻を $t = 0$ とする。作用する力は重力のみで、大きさは mg で y 軸の正の向きに作用する。初期条件は時刻 $t = 0$ のとき、位置が $y = 0$ 、速度が $v = -v_0$ である。物体の運動方程式は

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg$$

となる。これを

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

と変形し、 t で積分して速度 v を

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \int g dt = gt + C_1$$

と求める. この式に初期条件 $t = 0$ のとき $v = -v_0$ を代入すると,
 $C_1 = -v_0$ が得られるので, 速度 v は

$$v(t) = gt - v_0$$

となる. さらに, この式を t で積分して位置 y を

$$y(t) = \int v(t) dt = \int (gt - v_0) dt = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t + C_2$$

と求める. この式に初期条件 $t = 0$ のとき $y = 0$ を代入すると,
 $C_2 = 0$ が得られるので, 位置 y は

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t$$

となる. 例題 3.11 の答えと比べると, 位置も速度も符号が反転している.

- 3.11. 力は重力のみなので $\mathbf{f} = 0 \cdot \mathbf{i} + mg\mathbf{j}$ である. 初期条件は ①, ② で異なるので, あとで場合分けをしたときに確認する. ①, ② で作用する力が共通なので, 運動方程式も共通となり, 位置を $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ とすると

$$x \text{ 方向 } m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$y \text{ 方向 } m \frac{d^2y}{dt^2} = mg \quad (2)$$

となる.

① の場合の初期条件は $t = 0$ のとき $\mathbf{v} = (v_0 \cos \delta)\mathbf{i} + (-v_0 \sin \delta)\mathbf{j}$,
 $\mathbf{r} = 0 \cdot \mathbf{i} + h\mathbf{j}$ である. 式 (1), (2) の両辺を m で割り, t で積分し,
 速度の初期条件を考慮すると, 速度成分 v_x , v_y は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \delta \quad (3)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = gt - v_0 \sin \delta \quad (4)$$

となる. これらをさらに t で積分して, 位置の初期条件を考慮すると, 位置の成分 x , y は

$$x(t) = (v_0 \cos \delta)t \quad (5)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \sin \delta)t + h \quad (6)$$

となる. したがって, 打ち出されてから t だけ時間が経過したときの速度と位置は

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \delta)\mathbf{i} + (gt - v_0 \sin \delta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(t) = \left((v_0 \cos \delta)t \right) \mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \sin \delta)t + h \right) \mathbf{j}$$

である。地面に落ちる時刻は式 (6) で $y = h$ において, t について解くと得られ,

$$t = \frac{2v_0 \sin \delta}{g}$$

である。これを式 (3), (4), (5) に代入し, 物体が地面に落ちたときの速度と位置

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_0 \cos \delta) \mathbf{i} + (v_0 \sin \delta) \mathbf{j} \\ \mathbf{r} &= \left(\frac{2v_0^2 \cos \delta \sin \delta}{g} \right) \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} \end{aligned}$$

を得る。したがって, 地面に達したときの速度は, 初速度と比べて, 大きさは同じで, 向きは y 成分のみが反転している。

② の場合の初期条件は $t = 0$ のとき $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{r} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j}$ である。式 (1), (2) の両辺を m で割り, t で積分し, 速度の初期条件を考慮すると, 速度成分 v_x , v_y は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \quad (7)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = gt \quad (8)$$

となる。これらをさらに t で積分して, 位置の初期条件を考慮すると, 位置の成分 x , y は

$$x(t) = v_0 t \quad (9)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad (10)$$

となる。したがって, 打ち出されてから t だけ時間が経過したときの速度と位置は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= v_0 \mathbf{i} + gt \mathbf{j} \\ \mathbf{r}(t) &= (v_0 t) \mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}gt^2 \right) \mathbf{j} \end{aligned}$$

である。地面に落ちる時刻は式 (10) で $y = h$ において, t について解くと得られ,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

である。これを式 (7), (8), (9) に代入し、物体が地面に落ちたときの速度と位置

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_0 \mathbf{i} + \sqrt{2gh} \mathbf{j} \\ \mathbf{r} &= v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \mathbf{i} + h \mathbf{j}\end{aligned}$$

を得る。速度の x 成分は初速度と同じで、 y 成分は自由落下の速度と同じであり、したがって、この運動の速度は初速度と自由落下時の速度とをベクトルの的に加えたものになっている。

- 3.12. 質点の質量を m 、初速度の大きさを v_0 、力の大きさを f とする。質点が動き出した方向を x 方向の正の向きに、加わった力の方向を y 方向の正の向きになるように座標軸をとる。時刻 t における質点の位置を $x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ 、速度を $v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$ とする。質点が動き出した瞬間を時刻 $t = 0$ 、そのときの質点の位置を $x = 0, y = 0$ とすると、初期条件は $x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = v_0, v_y(0) = 0$ である。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = f$$

となる。初期条件を考慮して運動方程式を解くと、速度と位置は

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_0, \quad v_y(t) = \frac{f}{m}t, \\ x(t) &= v_0 t, \quad y(t) = \frac{f}{2m}t^2\end{aligned}$$

となる。 $t = 2 \text{ s}$, $m = 10 \text{ kg}$, $v_0 = 30 \text{ m/s}$, $f = 1200 \text{ N}$ を代入すると

$$x(2) = 60 \text{ m}, \quad y(2) = 240 \text{ m}$$

であるので、移動距離は

$$\sqrt{60^2 + 240^2} \text{ m} = 60\sqrt{17} \text{ m} \approx 2.5 \times 10^2 \text{ m}$$

となる。

- 3.13. x 軸の原点をばねが自然の長さのときの質点の位置にとり、鉛直下向きを正とする。この質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx = -k \left(x - \frac{mg}{k} \right)$$

となり, $x' = x - \frac{mg}{k}$ とおくと

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -kx'$$

を得る. 両辺を m で割り, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと,

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = -\omega^2 x'$$

となり, これは単振動の運動方程式である. したがって, 質点の運動は単振動となる. この運動方程式の一般解は定数 A, ϕ を用いて

$$x'(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$$

であるので, これより質点の位置を表す式

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right) + \frac{mg}{k}$$

を得る. これを t で微分すると速度を表す式

$$\frac{dx}{dt} = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$$

を得る. 初期条件は $t = 0$ のとき $x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$ であるので,

$$0 = A \cos \phi + \frac{mg}{k}, \quad 0 = -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \phi$$

から $\phi = 0, A = -\frac{mg}{k}$ となり,

$$x(t) = -\frac{mg}{k} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \frac{mg}{k}$$

を得る. バネが最も伸びるのは

$$\cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right) = -1$$

となるときで, このときの質点の位置

$$x = -\frac{mg}{k} \cdot (-1) + \frac{mg}{k} = \frac{2mg}{k}$$

が最大の伸びを表している.

【発展問題】

- 3.14. 加速度の大きさを a ，糸の張力の大きさを T とし，物体の運動方向を正として，それぞれの運動方程式を立てると

$$\text{物体 A : } m_1 a = m_1 g - T \quad (1)$$

$$\text{物体 B : } m_2 a = T - m_2 g \quad (2)$$

であり，式 (1), (2) を足し合わせて整理すると

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

を得る．これを式 (1) に代入して整理すると

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

となる．（なお，この装置はアトウッドの器械と呼ばれている．）

- 3.15. 地上からこの運動を観察する．人に働く力は，次の2つだけである．

- 重力（大きさ Mg ，鉛直下向き）
- 床からの垂直抗力（大きさ N ，鉛直上向き）

人の運動について，運動の第2法則を適用する．加速度を鉛直上向きに A とすると，

$$MA = N - Mg$$

であるので，

$$N = M(g + A) \quad (1)$$

となる．運動の第3法則から，人が床を押す力は床からの垂直抗力と大きさは等しく，向きは鉛直下向きである．よって，(a)～(c)のそれぞれの場合で，式 (1) に A の値を代入して， N の大きさを求める．

(a) $A = a$ より $N = M(g + a)$ である．

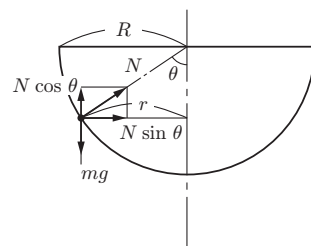
(b) $A = 0$ より $N = Mg$ である．

(c) $A = -g$ より $N = 0$ である．

- 3.16. 図のように断面を考え，円運動の半径を r ，面から受ける垂直抗力の大きさを N とし，運動方程式を立てると

$$\text{接線方向 : } m \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\text{法線方向 : } m \frac{v^2}{r} = N \sin \theta \quad (2)$$



$$\text{鉛直方向：} m \cdot 0 = N \cos \theta - mg \quad (3)$$

である。式 (2), (3) から N を消去して

$$\frac{v^2}{r} = g \tan \theta = \frac{gr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

となるので、これより

$$r^4 + \frac{v^4}{g^2} r^2 - \frac{v^4 R^2}{g^2} = 0$$

を得る。これを解くと半径は

$$r = \frac{v^2}{\sqrt{2}g} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{g^2 R^2}{v^4}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

となる。垂直抗力の大きさは式 (3) より

$$N = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} mg$$

となる。

3.17. 物体に働く力は、次の2つだけである。

- 張力 (大きさ S , 糸に沿って上向き)
- 重力 (大きさ mg , 鉛直下向き)

物体の運動を鉛直方向と水平面内に分けて考える。まず、鉛直方向には加速度 0 であるから、運動の第2法則を適用すると、

$$m \cdot 0 = S \cos \theta - mg$$

が得られる。よって、求める張力の大きさ S は

$$S = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (1)$$

である。次に、水平面内の運動について考えると、水平方向の力の成分は $S \sin \theta$ のみで、円運動の中心 (法線方向) を向いている。等速円運動をしており、加速度は法線方向の成分しかもないので、加速度を a として、法線方向に運動の第2法則を適用すると、

$$ma = S \sin \theta \quad (2)$$

となる。ここで、この円運動の回転半径は $l \sin \theta$ であるので、物体の速度の大きさを v とおくと、加速度 a は

$$a = \frac{v^2}{l \sin \theta} \quad (3)$$

と表される。式 (2) に式 (1), (3) を代入すると,

$$m \frac{v^2}{l \sin \theta} = \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta$$

となる。この式より v を求めると,

$$v = \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta}} \sin \theta$$

となる。よって、求める回転の角速度 ω は、 $v = (l \sin \theta)\omega$ より

$$\omega = \frac{v}{l \sin \theta} = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$$

となる。

- 3.18. まず、物体を鉛直に投げ上げたときの、時間と高さの関係を表す式を求める。投げ上げたときの物体の速さを v_0 とする。鉛直上向きに y 軸をとり、投げ上げ地点を $y = 0$ 、投げ上げ時刻を $t = 0$ とする。作用する力は重力のみで、大きさは mg で y 軸の負の向きに作用する。初期条件は時刻 $t = 0$ のとき、位置が $y = 0$ 、速度が $v = v_0$ である。物体の運動方程式は

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

となる。これを

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

と変形し、 t で積分して速度 v を

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \int (-g) dt = -gt + C_1$$

と求める。この式に初期条件 $t = 0$ のとき $v = v_0$ を代入すると、 $C_1 = v_0$ が得られるので、速度 v は

$$v(t) = -gt + v_0$$

となる。さらに、この式を t で積分して位置 y を

$$y(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

と求める。この式に初期条件 $t = 0$ のとき $y = 0$ を代入すると、 $C_2 = 0$ が得られるので、位置 y は

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad (1)$$

となる. $h = 24.5 \text{ m}$ として, 式 (1) に $y = h$ を代入すると

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

となり, これを t について解くと, 高さ h を通過する時刻

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

が得られる. ここで t が 2 つ求められるが, これは上昇時と下降時の通過時刻が得られるためである. それぞれの時刻を t_1, t_2 とすると,

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}, \quad t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

である. この差を Δt とすると

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

となり, これより

$$v_0 = g\sqrt{\frac{(\Delta t)^2}{4} + \frac{2h}{g}}$$

を得る. これに $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $h = 24.5 \text{ m}$, $\Delta t = 4.00 \text{ s}$ を代入し, 求める速さ v_0 は

$$v_0 = 29.4 \text{ m/s}$$

となる.

- 3.19. ボールに作用する力は, 重力 (大きさ mg , 鉛直下向き), 斜面からの垂直抗力 (大きさ N , 斜面に垂直上向き) の 2 つである. 問題の図において $\overrightarrow{PQ}$ の向きに x 軸, 斜面にそって上向きに y 軸, 点 P を原点にとる. 初期条件は, $t = 0$ のとき $v_x = v_0 \cos \delta$, $v_y = v_0 \sin \delta$, $x = 0$, $y = 0$ である. 運動方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} x \text{ 方向} : m \frac{d^2x}{dt^2} &= 0 \\ y \text{ 方向} : m \frac{d^2y}{dt^2} &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

となる. 初期条件を考慮して運動方程式を解くと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos \delta, \quad \frac{dy}{dt} = -g(\sin \theta)t + v_0 \sin \delta \\ x &= v_0(\cos \delta)t, \quad y = -\frac{1}{2}g(\sin \theta)t^2 + v_0(\sin \delta)t \end{aligned} \quad (1)$$

となる．ボールの経路の方程式は，式 (1) の x と y の式から t を消去して

$$y = -\frac{1}{2}g(\sin\theta)\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\delta} + x\tan\delta \quad (2)$$

となる．ボールが穴に入るということは，点 $(l, 0)$ を通るということである．式 (2) にこの点の座標を代入すると，

$$0 = -\frac{1}{2}g(\sin\theta)\frac{l^2}{v_0^2\cos^2\delta} + l\tan\delta$$

となるので，この式を整理して求めたい v_0 と δ との関係は

$$v_0^2 = \frac{gl\sin\theta}{\sin 2\delta}$$

となる．

- 3.20. 鉛直方向上向きを y 軸の正の向き，水平飛行している飛行機の方
向・向きを x 軸の正の向きとする．重力加速度の大きさを g とす
る．物体の初期条件は $t = 0$ のとき $x = 0, y = h, \frac{dx}{dt} = v, \frac{dy}{dt} = 0$
である．物体の質量を m とすると物体の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

である．初期条件を考慮して運動方程式解くと，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \quad \frac{dy}{dt} = -gt \\ x &= vt, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{aligned}$$

となる．物体が地面に落ちる時刻は， $y = 0$ となる時刻であるので，

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2$$

より，

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

である．この間に物体は x 方向に l だけ進むので，

$$l = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

であり，これを解いて

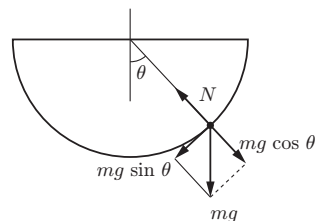
$$v = \sqrt{\frac{g}{2h}}l$$

となる．

3.21. 図のように、質点の質量を m 、おわんから受ける垂直抗力の大きさを N とする. r 方向と θ 方向の運動方程式を立てると

$$r \text{ 方向} : m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = mg \cos \theta - N$$

$$\theta \text{ 方向} : m \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = -mg \sin \theta$$



である. ここで r は一定, つまり, $\frac{dr}{dt} = 0$ であるので運動方程式は

$$r \text{ 方向} : -mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - N \quad (1)$$

$$\theta \text{ 方向} : mr \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (2)$$

となる. 小さな往復運動なので, $\sin \theta = \theta$ と近似できる. よって式 (2) より

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{r} \theta$$

となり, $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$ とおくと単振動の運動方程式

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$$

が得られるので, この運動は単振動である. 周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

である.

3.22. 運動方程式は

$$r \text{ 方向} : m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = -f_0 \quad (1)$$

$$\theta \text{ 方向} : m \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) = 0 \quad (2)$$

となるので $r = r_0$ が式 (1), (2) を満たすことを確認すればよい. まず, r は一定, つまり, $\frac{dr}{dt} = 0$ であるので, 式 (1), (2) は

$$-mr_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -f_0 \quad (3)$$

$$mr_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \quad (4)$$

となる。式 (3) より

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{f_0}{mr_0}}$$

を得る。 f_0, m, r_0 はともに正であるので、 $\frac{d\theta}{dt}$ は実数値として存在できる。また、この式より $\frac{d\theta}{dt}$ は定数であり、 $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ となるが、これは式 (4) と矛盾しない。したがって、 $r = r_0$ は式 (1), (2) を満たすので解であることがいえる。回転の速さは

$$v = r_0 \frac{d\theta}{dt} = r_0 \sqrt{\frac{f_0}{mr_0}} = \sqrt{\frac{f_0 r_0}{m}}$$

である。この運動は中心点のまわりの等速円運動なので、その射影は単振動となっている。

第4章 解答

【基本問題】

- 4.1. (1) 加えた力は一定で、その方向は物体の移動方向と一致するので、

$$W = Fs = 20 \text{ N} \times 3.0 \text{ m} = 60 \text{ J}$$

- (2) 動摩擦力は物体の移動方向と逆向きに作用しているので、

$$W = Fs \cos \theta = 5.0 \text{ N} \times 3.0 \text{ m} \times \cos \pi = -15 \text{ J}$$

- (3) 重力と物体の移動方向となす角は $\theta = 60^\circ$ 、移動距離は $s = 6.0 \text{ m}$ なので、

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \theta = mgs \cos 60^\circ \\ &= 20 \times 9.8 \times 6.0 \times 0.50 = 588 \text{ J} (\approx 5.9 \times 10^2 \text{ J}) \end{aligned}$$

- (4) 求める仕事 W は、鉛直方向に移動時の仕事 W_1 と水平方向に移動時の仕事 W_2 を足せば求められる。水平方向に移動時は、重力と移動方向が直交するので、 $\theta = 90^\circ$ であり、 $W_2 = Fs \cos \theta = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = W_1 + 0 = Fs = mgh = 20 \times 9.8 \times 3.0 \\ &= 588 \text{ J} (\approx 5.9 \times 10^2 \text{ J}) \end{aligned}$$

4.2. $1 \text{ kWh} = 1 \times 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$

- 4.3. 水の抵抗力 F はボートの移動方向に逆向きに作用しているので、 F のした仕事 W は、

$$W = Fl \cos \pi = -Fl$$

である。この仕事 W の分だけ物体の運動エネルギーが変化するので、

$$-Fl = \frac{1}{2}m \times 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

である。したがって求める抵抗力 F の大きさは、与えられた数値を入れると、

$$F = \frac{mv_0^2}{2l} = \frac{400 \times 30^2}{2 \times 500} = 360 \text{ N}$$

となる。なお、値を代入するときは単位に注意し、速さは m/s に変換する。

4.4. 弾丸の運動エネルギーは、壁に侵入し失った仕事と同じだから、

$$\frac{1}{2} \times 0.01 \text{ kg} \times (260 \text{ m/s})^2 = F \times 0.1 \text{ m}$$

よって

$$F = 3380 \text{ N} \approx 3.4 \times 10^3 \text{ N}$$

4.5. 自然長からのばねの伸びを x とすると、おもりに働く力のつり合いより、 $kx = Mg$ が成り立つ。よって

$$x = \frac{Mg}{k}$$

求める弾性エネルギーは、

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{M^2 g^2}{2k}$$

4.6. 初めの位置を点 A、高さ x だけ下った位置を B とし、点 A、点 B における位置エネルギー、運動エネルギーをそれぞれ $U(A)$, $K(A)$, $U(B)$, $K(B)$ とする。力学的エネルギー保存の法則より、

$$U(A) + K(A) = U(B) + K(B) \quad (5)$$

が成り立つ。 l だけ下った点 B を高さの基準とし、点 B での速さを v とすると、

$$U(A) = mg(l \sin \theta)$$

$$K(A) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$U(B) = 0$$

$$K(B) = \frac{1}{2} m v^2$$

であるので、式 (1) より、

$$mg(l \sin \theta) + \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

よって、

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gl \sin \theta}$$

となる。

【発展問題】

- 4.7. 経路 C_1 について, 原点 $O(0,0)$ から x 軸上を点 $B(x_A, 0)$ まで行く経路を C_{11} , 点 $B(x_A, 0)$ から y 軸に平行に点 $A(x_A, y_A)$ まで進む経路を C_{12} に分ける. C_{11} では, $ds = (dx, dy) = (dx, 0)$, x 軸上なので常に $y = 0$ である. また, C_{12} では, $ds = (dx, dy) = (0, dy)$, 軸に平行なので常に $x = x_A$ である. 以上より,

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{C_{11}} (-f\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) - \int_{C_{12}} (-f\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (0\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= - \int_0^{x_A} f dx - 0 = -fx_A \end{aligned}$$

経路 C_2 においては, t をパラメータ (ただし, $0 \leq t \leq 1$) として, $x = x_A t$, $y = y_A t$ と書ける. さらに $dx = x_A dt$, $dy = y_A dt$ である.

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{C_2} (-f\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_{C_2} (-f\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (x_A dt\mathbf{i} + y_A dt\mathbf{j}) = - \int_0^1 f_A dx = -fx_A \end{aligned}$$

本問での力 f では, $W_1 = W_2$ である.

- 4.8. それぞれの仕事は, $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ より, $W = \int_C ((x^2 + 2y)\mathbf{i} + 4xy\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s}$ を計算する.

経路 C_1 について, 原点 $O(0,0)$ から x 軸上を点 $B(2,0)$ まで行く経路を C_{11} , 点 $B(2,0)$ から y 軸に平行に点 $A(2,2)$ まで進む経路を C_{12} に分ける. C_{11} では, $ds = (dx, dy) = (dx, 0)$, x 軸上なので常に $y = 0$ である. また, C_{12} では, $ds = (dx, dy) = (0, dy)$, 軸に平行なので常に $x = 2$ である. 以上より,

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{C_{11}} ((x^2 + 2 \cdot 0)\mathbf{i} + 4x \cdot 0\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \\ &\quad - \int_{C_{12}} ((2^2 + 2y)\mathbf{i} + 4 \cdot 2 \cdot y\mathbf{j}) \cdot (0\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 8y dy \\ &= \frac{56}{3} \text{ J} \end{aligned}$$

経路 C_2 においては, t をパラメータ (ただし, $0 \leq t \leq 1$) として, $x = 2t$, $y = 2t$ と書ける. さらに $dx = 2dt$, $dy = 2dt$ である.

$$W_2 = \int_{C_2} ((x^2 + 2y)\mathbf{i} + 4xy\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 ((4t^2 + 4t)\mathbf{i} + 16t^2\mathbf{j}) \cdot (2dt\mathbf{i} + 2dt\mathbf{j}) \\
&= \frac{52}{3} \text{ J}
\end{aligned}$$

4.9. (1) $W_1 = 10 \text{ N} \times 4.0 \text{ m} = 40 \text{ J}$

(2) 摩擦力の大きさは, $5.0 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.10 = 4.9 \text{ N}$ だから,

$$W_2 = -4.9 \text{ N} \times 4.0 \text{ m} = -19.6 \approx -20 \text{ J}$$

(3) 物体に力 F がした仕事と摩擦力によって失った仕事とが, 物体の運動エネルギーになるので,

$$\frac{1}{2} \times 5.0 \text{ kg} \times v^2 = 40 \text{ J} - 19.6 \text{ J}$$

より,

$$v = 2.9 \text{ m/s}$$

4.10. 物体に力 F が仕事と摩擦力によって失った仕事は, 物体が最初持っていた運動エネルギーと最後持っている運動エネルギーの差と同じなので,

$$F \cos \theta \cdot l - \mu'(mg - F \sin \theta) \cdot l = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

よって,

$$v = \sqrt{\frac{2(\cos \theta + \mu' \sin \theta) - \mu' mg}{m} l} + v_0^2$$

4.11. エネルギー保存の法則から, ばねのポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和は, 物体の速度の大きさの最大値 v' (すなわちポテンシャルエネルギーが 0 の時, 最大となる) は等しいので

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

なので,

$$v' = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 + v^2}$$

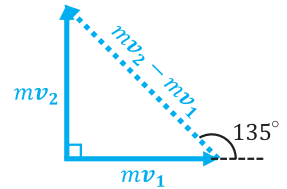
に数字を代入すると,

$$\begin{aligned}
v' &= \sqrt{\frac{2.5}{0.16}(0.16)^2 + (-1.5)^2} \text{ m/s} \\
&= 2.5 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

第5章 解答

【基本問題】

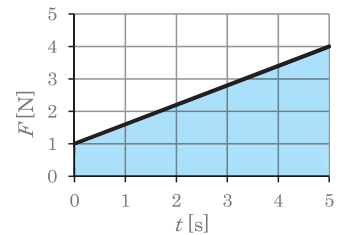
- 5.1. 小球の初めの速度を $\mathbf{v}_1$ ，変化後の速度を $\mathbf{v}_2$ とすると，求める力積は $m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$ と等しい．また，題意より， $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = v_0$ であり， $m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$ は右図のように表されるので，求める力積は次の通りである．



$$\text{大きさ： } |m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}mv_0$$

向き： 小球が飛んできた方向を基準として飛ばす方向に向かって 135°

- 5.2. (1) 求める力積は $\int_0^{5.0} F dt$ であるが，これは，右の $F-t$ 図における水色部分の面積に対応するので，



$$\begin{aligned} \int_0^{5.0} F dt &= \frac{1}{2} \times (F(0) + F(5.0)) \times \Delta t \\ &= \frac{1}{2} \times (1.0 + 4.0) \times 5.0 \text{ N} \cdot \text{s} \\ &= 12.5 \text{ N} \cdot \text{s} \ (\approx 13 \text{ N} \cdot \text{s}) \end{aligned}$$

- (2) 物体の運動量の変化は，加えられた力積に等しい．よって，

$$mv(5.0) - mv(0) = \int_0^{5.0} F dt \text{ であるので，}$$

$$10 \times v(5.0) - 10 \times 5.0 = 12.5$$

$$\therefore v(5.0) = 6.25 \text{ m/s} \ (\approx 6.3 \text{ m/s})$$

- 5.3. この気体分子の衝突前，衝突後の運動量は，分子が壁に向かっていく向きを正とすれば，それぞれ $+mv$ ， $-mv$ であるから，1回の壁への衝突で気体分子が受ける運動量変化は，

$$-mv - mv = -2mv$$

である．この運動量変化は，気体分子が壁から受ける力積に等しい．壁が気体分子に与える平均の力を F とすれば，力積は，

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = F \Delta t$$

と書いてよい．ただし Δt とは，衝突の開始（時刻 t_1 ）から終了

(時刻 t_2) までの時間差 ($t_2 - t_1 = \Delta t$) のことである.

$$\Delta t = \frac{1}{N}$$

であるから,

$$|F|\Delta t = |F|\frac{1}{N} = 2mv$$

$$\therefore |F| = 2Nmv$$

となる. 壁が気体分子に与える力の大きさは, 運動の第3法則 (作用・反作用の法則) より, 気体分子が壁に与える力の大きさに等しいから, 上記の $|F|$ が求める力である.

- 5.4. 東向きを x 軸の正の向き, 北向きを y 軸の正の向きと考え, 問題の状況を表すと次の図のようになる. 求める衝突後の速度を $\mathbf{v}' = (v_x, v_y)$ とし (注: A, B は一体となるので, 同じ速度である), 運動量保存の法則を x, y 軸方向に対して適用すると,

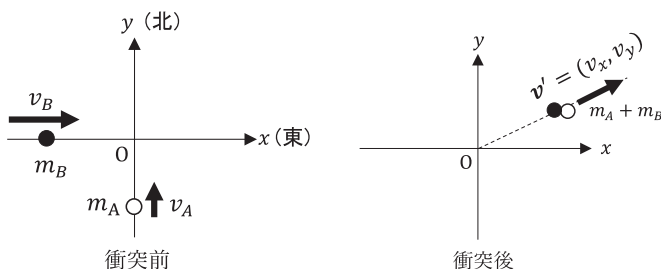
$$x \text{ 方向: } m_A \times 0 + m_B v_B = (m_A + m_B) v_x$$

$$\rightarrow v_x = \frac{m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{1.0 \times 9.0}{2.0 + 1.0} \text{ m/s} = 3.0 \text{ m/s}$$

$$y \text{ 方向: } m_A v_A + m_B \times 0 = (m_A + m_B) v_y$$

$$\rightarrow v_y = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{2.0 \times 6.0}{2.0 + 1.0} \text{ m/s} = 4.0 \text{ m/s}$$

したがって, 求める衝突後の速度は, 東向きに 3.0 m/s, 北向きに 4.0 m/s の成分である.



- 5.5. 地球の公転周期を T とすると, 地球の速度の大きさは $v = \frac{2\pi R}{T}$ である. したがって, 地球の運動量の大きさは,

$$p = Mv = \frac{2\pi RM}{T}$$

である. 地球の速度の方向は円軌道の接線方向であるから, 太陽から地球に向かう方向に対して直交している. したがって, 角運

動量の大きさは,

$$\begin{aligned} L &= MvR = \frac{2\pi R^2 M}{T} \\ &= \frac{2\pi \times (1.5 \times 10^{11})^2 \times 6.0 \times 10^{24}}{365 \times 24 \times 60 \times 60} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \\ &= 2.7 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \end{aligned}$$

となる.

- 5.6. 例題 5.8 と同じ状況なので, その結果を参照して数値を代入すればよい.

$$\text{速さ } v = r\omega = 3.0 \times 2.0 \text{ m/s} = 6.0 \text{ m/s}$$

角運動量の大きさ

$$l = rp = rmv = 3.0 \times 4.0 \times 6.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = 72 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

【発展問題】

- 5.7. 人がジャンプすると, 板はその反動で反対方向に動き出す. その速さを V とすれば, 水平の方向に対して運動量保存の法則を適用して,

$$mV_0 \cos \theta - MV = 0$$

$$V = \left(\frac{m}{M}\right) V_0 \cos \theta$$

(真上に飛び上がれば, $\theta = \frac{\pi}{2}$ となって, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, つまり $V = 0$ となることを確認しよう.) なお, 人がジャンプしたときの運動量の垂直成分は, 人が板を下向きに床を押し下げる方向になる.

- 5.8. 衝突は弾性衝突であるから, 衝突後の小球の速さの大きさの垂直成分は変わらない. 従って, 1 回の衝突による小球の垂直方向の運動量変化は,

$$-mv \cos 30^\circ - mv \cos 30^\circ = -\sqrt{3}mv$$

毎秒 n 回衝突するから, 1 秒あたりの小球の垂直方向の運動量変化は, $\sqrt{3}mnv$ である. これは, 小球が 1 秒間に秤に及ぼす力積に等しい. つまり, これは小球が秤に与える力 F に等しい. 小球は続けざまに衝突するので秤の針はもとの 0 に戻る時間的余裕がないとみなしてよいから, 秤の読みは, この力 F に対応する質量を示すはずである. 従って,

$$\frac{\sqrt{3}mvn}{g}$$

となる.

- 5.9. 小球 A の進行方向を x 軸正の方向, 垂直方向を y 軸方向とする.
 小球 B の散乱後の速さ, 及び x 軸正の方向から測った散乱角はそれぞれ v'_2 , θ_2 となる. 衝突前, 衝突後の運動量は, x 成分, y 成分ごとに保存されるから,

$$x : mv_1 = mv'_1 \cos \theta_1 + mv'_2 \cos \theta_2$$

$$y : mv'_1 \sin \theta_1 = mv'_2 \sin \theta_2$$

さらに, 弾性衝突であるから, 力学的エネルギー保存の法則が成り立つので,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

上の 3 つの式を整理すると,

$$v_1 = v'_1 \cos \theta_1 + v'_2 \cos \theta_2 \quad (1)$$

$$v'_1 \sin \theta_1 = v'_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (3)$$

(1) より,

$$v'_1 \cos \theta_1 = v_1 - v'_2 \cos \theta_2$$

この両辺を 2 乗し, (2) の両辺を 2 乗したものと足し合わせる. す
 ると,

$$(v_1 - v'_2 \cos \theta_2)^2 + (v'_2 \sin \theta_2)^2 = v_1'^2$$

これを整理すると,

$$v_1'^2 = v_1^2 - 2v_1v'_2 \cos \theta_2 + v_2'^2$$

(3) を用いると次のように整理できる.

$$v'_2 (v'_2 - v_1 \cos \theta_2) = 0$$

となる. $v'_2 = 0$ とすると, $v'_1 \neq 0$ の条件があるから, (2) 式より, $\theta_1 = 0$ となる. つまり, 小球 A はそのまま通りすぎるだけ.
 $v'_2 - v_1 \cos \theta_2 = 0$ ならば, (1) 式より,

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\left(\frac{v'_1}{v_1}\right) \cos \theta_1}$$

$$\therefore \theta_2 = \sin^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{v'_1}{v_1} \right) \cos \theta_1} \right)$$

v'_2 については,

$$v'_2 = v_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v'_1}{v_1} \right) \cos \theta_1}$$

となる.

- 5.10. 人工衛星の質量を m , 地表すれすれに円軌道を描いて回っているときの速さを v とする. この時, 人工衛星には円運動の向心力が作用するので,

$$mg = m \frac{v^2}{R_e} \quad (1)$$

$$\therefore v = \sqrt{gR_e} \quad (2)$$

また, G を万有引力定数, M を地球の質量として, 万有引力の法則から,

$$mg = G \frac{mM}{R_e^2}$$

が成り立つので, これを変形すると,

$$\frac{GM}{R_e} = gR_e \quad (3)$$

一方, 地球から打ち上げた直後の人工衛星の力学的エネルギーは,

$$\frac{1}{2}m(av)^2 - G \frac{mM}{R_e} \quad (4)$$

一方, 地球から最も遠い地点での人工衛星の力学的エネルギーは,

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - G \frac{mM}{R_M} \quad (5)$$

力学的エネルギー保存の法則より, 式 (4) と (5) を等しいとおいて

$$\frac{1}{2}m(av)^2 - G \frac{mM}{R_e} = \frac{1}{2}mv_M^2 - G \frac{mM}{R_M}$$

式 (2), (3) を用いて上式を変形する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a^2gR_e - gR_e &= \frac{1}{2}v_M^2 - g \left(\frac{R_e^2}{R_M} \right) \\ \therefore v_M^2 &= a^2gR_e - 2gR_e + 2gR_e \left(\frac{R_e}{R_M} \right) \\ &= gR_e \left\{ a^2 - 2 + 2 \left(\frac{R_e}{R_M} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

一方、角運動量保存の法則より、

$$avR_e = v_MR_M \quad \therefore \quad v_M = av \left(\frac{R_e}{R_M} \right) = a\sqrt{gR_e} \left(\frac{R_e}{R_M} \right) \quad (7)$$

ここで、 $x \equiv \frac{R_e}{R_M}$ とおけば、式(7)を式(6)に代入して、

$$\begin{aligned} a^2x^2 - 2x - a^2 + 2 &= 0 \\ \therefore x &= 1, \quad x = -1 + \frac{2}{a^2} \end{aligned}$$

$R_M > R_e$ でなければならないから、 x は 1 より小さくなければならない。従って、 $x = 1$ は解として不適切。 $x = -1 + \frac{2}{a^2}$ だけが解として可能性があるが、可能な範囲は $0 < x < 1$ であるので、 a の値として許される範囲は、

$$1 < a < \sqrt{2}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} R_M &= \left(\frac{a^2}{-a^2 + 2} \right) R_e \\ v_M &= \left(-a + \frac{2}{a} \right) \sqrt{gR_e} \end{aligned}$$

ここで、具体的に数値を入れてみよう。 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $R_e = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ である。 よって、 $\sqrt{gR_e} = \sqrt{9.80 \times 6.4 \times 10^6} \text{ m/s} = 7.9 \times 10^3 \text{ m/s} = 7.9 \text{ km/s}$. 特に、 $a = \sqrt{1.5} \approx 1.22$ とすれば、

$$\begin{aligned} R_M &= 3R_e \approx 1.9 \times 10^7 \text{ m} \\ v_M &= \left(-\sqrt{1.5} + \frac{2}{\sqrt{1.5}} \right) \sqrt{gR_e} \\ &= 0.42 \times 7.9 \times 10^3 \text{ m/s} = 3.3 \times 10^3 \text{ m/s} = 3.3 \text{ km/s} \end{aligned}$$

となる。

- 5.11. 地球から十分遠い場所では、重力によるポテンシャルエネルギーは 0 とみなしていいから、小惑星の力学的エネルギーは、

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgR_e \quad (1)$$

である。ただし、小惑星の質量を m とする。地球に最も近づいた時の距離を R_M 、その時の速さを v_M とすると、その時における小惑星の力学的エネルギーは、

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - G\frac{mM}{R_M} \quad (2)$$

である。ここで、 M は地球の質量である。力学的エネルギー保存の法則より、式 (1) と (2) を等しいとおいて

$$mgR_e = \frac{1}{2}mv_M^2 - G\frac{mM}{R_M} \quad (3)$$

ここで、

$$g = \frac{GM}{R_e^2} \Leftrightarrow GM = gR_e^2$$

であるから、(3) 式を書き換えて、

$$\begin{aligned} gR_e &= \frac{1}{2}v_M^2 - g\left(\frac{R_e^2}{R_M}\right) \\ \therefore v_M^2 &= 2gR_e\left(1 + \frac{R_e}{R_M}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

さらに、角運動量保存の法則より、

$$\begin{aligned} mvb &= mv_MR_M \\ \therefore v_M &= \frac{vb}{R_M} = \frac{b}{R_M}\sqrt{2gR_e} \end{aligned} \quad (5)$$

式 (4), (5) を用いて v_M を消去すると、次の二次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} R_M^2 + R_eR_M - b^2 &= 0 \\ \therefore R_M &= \frac{-R_e \pm \sqrt{R_e^2 + 4b^2}}{2} \end{aligned}$$

$R_M > 0$ でなければならないから、上式の複号のうち+だけが適切。よって、

$$\therefore R_M = \frac{-R_e + \sqrt{R_e^2 + 4b^2}}{2} > 0$$

(ここで、もう少し考えてみよう。 $R_M = 0$ のとき、小惑星は地球に正面衝突する。こうなるのは、

$$-R_e + \sqrt{R_e^2 + 4b^2} = 0$$

つまり、 $b = 0$ のときにそのようなことが起こる。また、 $R_M = R_e$ のとき、小惑星は地球表面をかすめることになる。こうなるのは、

$$\frac{-R_e + \sqrt{R_e^2 + 4b^2}}{2} = R_e$$

つまり、 $b = \sqrt{2}R_e$ のときにそのようなことが起こる。)

第6章 解答

【基本問題】

$$\begin{aligned}
 6.1. \text{ 全質量: } M &= \sum_{i=A,B,C,D} m_i = (2.0 + 1.0 + 4.0 + 3.0) \text{ kg} \\
 &= 10 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

重心の x 座標:

$$\begin{aligned}
 x_R &= \frac{1}{M} \sum_{i=A,B,C,D} m_i x_i \\
 &= \frac{1}{10} \{2 \times 3 + 1 \times (-3) + 4 \times (-2) + 3 \times 1\} = -0.20
 \end{aligned}$$

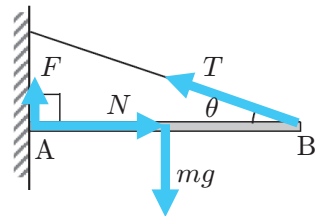
重心の y 座標:

$$\begin{aligned}
 y_R &= \frac{1}{M} \sum_{i=A,B,C,D} m_i y_i \\
 &= \frac{1}{10} \{2 \times 4 + 1 \times 2 + 4 \times (-2) + 3 \times (-1)\} = -0.10
 \end{aligned}$$

よって、求める重心位置は $\mathbf{R} = (-0.20, -0.10)$ である.

6.2. 外力を受けないとき、 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ であるので、 $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}$ 、つまり、質点系の全運動量 $\mathbf{P}$ (= 太陽と地球の運動量の和) は時間変化しない. 一方、この $\mathbf{P}$ は質点系の全質量が重心に集中した仮想質点の運動量と等しい. よって、外力を受けないとき、重心は静止を続けるか、または、等速直線運動を続ける.

6.3. この棒に働く力は図中の矢印の通りである. (なお、点 A において壁から受ける垂直抗力の大きさは N と表した. また、A 点で棒が壁から受ける摩擦力 F は、棒がずれ落ちようとするのを妨げる方向に働くので、鉛直上向きに働く.)



この棒が静止するための条件、つまり、剛体の釣り合いの条件は、棒に働く力の合力が 0、かつ、任意の点のまわりの力のモーメントの総和が 0、であることから、次の関係が成り立つ.

$$\text{鉛直方向の合力が } 0: T \sin \theta + F = mg \quad (1)$$

$$\text{水平方向の合力が } 0: N = T \cos \theta \quad (2)$$

A 点まわりの力のモーメントの総和が 0:

$$L \times T \sin \theta - \frac{L}{2} \times mg = 0 \quad (3)$$

したがって、糸の張力の大きさ T は、式 (3) を整理すると、

$$T = \frac{mg}{2 \sin \theta}$$

となる。これを式(1)に代入し、摩擦力の大きさ F を求めると、

$$F = mg - T \sin \theta = mg - \frac{mg}{2 \sin \theta} \sin \theta = \frac{1}{2} mg$$

となる。また、この問題では求めることを指示はされていないが、

壁から受ける垂直抗力の大きさ N は式(2)より求めることができ、

$$N = T \cos \theta = \frac{mg}{2 \sin \theta} \cos \theta = \frac{mg}{2 \tan \theta}$$

となる。

- 6.4. この棒に働く力は図中の矢印の通りである。(ここで、棒が壁と床から受ける垂直抗力の大きさをそれぞれ N_1 , N_2 とし、棒が床から受ける摩擦力の大きさを F と表した。)

この棒が静止するための条件、つまり、剛体の釣り合いの条件は、棒に働く力の合力が0、かつ、任意の点のまわりの力のモーメントの総和が0、であることから、次の関係が成り立つ。

$$\text{鉛直方向の合力が0: } N_2 = mg \quad (1)$$

$$\text{水平方向の合力が0: } N_1 = F \quad (2)$$

床と棒との接触点まわりの力のモーメントの総和が0:

$$\frac{L}{2} \times mg \sin \theta - L \times N_1 \cos \theta = 0 \quad (3)$$

式(3)を整理すると、

$$N_1 = \frac{mg \sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{mg \tan \theta}{2}$$

以上より、

壁から受ける垂直抗力の大きさは $\frac{mg \tan \theta}{2}$

床から受ける垂直抗力の大きさは mg

床から受ける摩擦力の大きさは $\frac{mg \tan \theta}{2}$

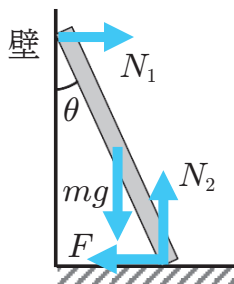
である。

- 6.5. ① 半径 r の円板の円周に沿って作用する力 F による中心まわりの力のモーメント N は

$$N = rF$$

円板の回転の運動方程式(慣性モーメント I , 回転角 ϕ , 角加速度 α)は

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = I \alpha = N$$



以上の2式より，求める角加速度 α は

$$\alpha = \frac{N}{I} = \frac{rF}{I} = \frac{3.0 \times 0.40}{0.80} \text{ rad/s}^2 = 1.5 \text{ rad/s}^2 \quad (\text{一定})$$

である．

- ② 回転の角速度を ω （力が作用している間は角加速度 α が一定値）とすると，

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \int \alpha dt = \alpha t + \omega_0$$

である．ここで， ω_0 は積分定数であり，初期角速度を意味している．この問題では，始め静止していたので， $\omega_0 = 0$ であり， t 秒後の角速度は

$$\omega = \alpha t = 1.5t$$

と表される．よって，求める 2.0 秒後の角速度は，これに $t = 2.0 \text{ s}$ を代入し，

$$\omega = 1.5 \times 2 \text{ rad/s} = 3.0 \text{ rad/s}$$

である．

- ③ t 秒後の回転角 ϕ は，次式で表される．

$$\phi = \int \omega dt = \int \alpha t dt = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \phi_0$$

ここで， ϕ_0 は積分定数であり，初期角度を意味している．この問題では $\phi_0 = 0$ とし，この式 $t = 2.0 \text{ s}$ を代入すれば，求める 2.0 秒間での回転角を求められる．したがって，求める 2.0 秒間での回転角は，

$$\phi = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 2.0^2 \text{ rad} = 3.0 \text{ rad}$$

である．

- 6.6. 線密度を ρ とすると， $m = \rho l$ であるから， $\rho = \frac{m}{l}$ と表される．

また， x 軸の原点は棒の左端とする．長さ dx の棒の微小な部分の質量を dm とすると， $dm = \rho dx$ である．この微小部分が原点から x の位置にあるとすると，微小部分の慣性モーメント dI は $dI = x^2 dm = x^2 \rho dx$ であるので，求める慣性モーメント I はこれを棒全体で足し合わせればよい．

$$I = \int dI = \int x^2 dm = \rho \int_0^l x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{\rho}{3} (l^3 - 0)$$

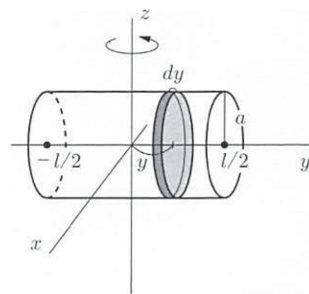
$$= \frac{\rho l^3}{3} = \frac{m l^3}{l \cdot 3} = \frac{1}{3} m l^2$$

【別解】

棒の重心は棒の中心に位置するので、例題 6.7 は重心を通る回転軸についての慣性モーメント I_G を求めたことになる。この問題の場合は、重心を通る回転軸から $\frac{l}{2}$ だけ離れている場合になるので、平行軸の定理（式 (6-45)）を用いると、次のように簡単に求められる。

$$I = I_G + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

- 6.7. 図のように座標をとる。円柱の密度を ρ とすると、 $m = \rho \pi a^2 l$ であるから、 $\rho = \frac{m}{\pi a^2 l}$ と表される。厚さ dy の円板の質量を dm とすると、 $dm = \rho \pi a^2 dy$ である。この円板が原点から y の位置にあるとすると、微小部分の慣性モーメント dI は、重心を通る回転軸についての慣性モーメント I_G を例題 6.9 で求めた円板の慣性モーメント $\frac{1}{4} m a^2$ として、平行軸の定理（式 (6-45)）を用いると、



$$\begin{aligned} dI &= I_G + m y^2 \\ &= \frac{1}{4} m a^2 + m y^2 \\ &= \frac{1}{4} (\rho \pi a^2 dy) a^2 + (\rho \pi a^2 dy) y^2 \\ &= \rho \pi a^2 \left(y^2 + \frac{a^2}{4} \right) dy \end{aligned}$$

となる。したがって、求める慣性モーメント I はこれを円柱全体で足し合わせればよい。

$$\begin{aligned} I &= \rho \pi a^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(y^2 + \frac{a^2}{4} \right) dy \\ &= \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(y^2 + \frac{a^2}{4} \right) dy \\ &= \frac{m}{l} \left[\frac{1}{3} y^3 + \frac{a^2}{4} y \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \\ &= \frac{2m}{l} \left(\frac{1}{24} l^3 + \frac{1}{8} a^2 l \right) \\ &= \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m a^2 \end{aligned}$$

- 6.8. 回転している円板の運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.80 \times 0.10^2 \text{ J} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

である.

6.9. 回転している円板においては

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

が成り立つので, $W = 4.0 \text{ J}$, $I = 0.80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $\omega_1 = 0.10 \text{ rad/s}$ を代入して, ω_2 の値を求めればよい. したがって, 求める円板の角速度 ω_2 は,

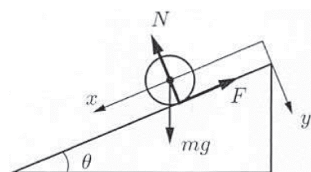
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2 \times 4.0}{0.80} + 0.10^2} \text{ rad/s} \approx 3.2 \text{ rad/s}$$

である.

6.10. 図のように座標をとる. 重心の運動方程式は,

$$x \text{ 軸方向: } m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin \theta - F \quad (1)$$

$$y \text{ 軸方向: } m \frac{d^2y}{dt^2} = mg \cos \theta - N \quad (2)$$



となる. また, 円筒の慣性モーメントを I , 回転角を ϕ とすれば, 回転の運動方程式は,

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} = aF \quad (3)$$

となる. ここで, x と ϕ の間には次式の関係が成り立つ.

$$x = a\phi \quad (4)$$

式 (1), (3), (4) より,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin \theta - \frac{I}{a} \frac{d^2\phi}{dt^2} = mg \sin \theta - \frac{I}{a^2} \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5)$$

整理すると,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{a^2}} \quad (6)$$

となる. これを計算するためには, 円筒の中心軸まわりの慣性モーメント I がわかればよい.

この円筒の密度を ρ とすると円筒の質量 m は次式のように表すことができる.

$$m = \rho \pi a^2 l \quad (7)$$

中心軸方向 (xy 平面に垂直な z 軸方向) の微小量を dz として, これを高さとする薄い円筒を考える. この薄い円筒の質量を m_0 は,

$$m_0 = \rho \pi a^2 dz \quad (8)$$

となる. 薄い円筒は円板として考えることができるため, 例題 6.10 より, 円板の中心軸まわりの慣性モーメントが $\frac{1}{2}ma^2$ であったことを利用すると, 薄い円筒中心軸まわりの慣性モーメント I_0 は,

$$I_0 = \frac{1}{2}(\rho \pi a^2 dz)a^2 \quad (9)$$

となる. これを中心軸方向に積分をすると,

$$I = \int_0^l I_0 = \int_0^l \frac{1}{2}(\rho \pi a^2 dz)a^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{l} a^2 \int_0^l dz = \frac{1}{2}ma^2 \quad (10)$$

となる. 式 (10) を式 (6) に代入し, x 軸方向の加速度を求めると,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{1}{2}m} = \frac{2}{3}g \sin \theta \quad (11)$$

が得られる. y 軸方向の加速度は, 円筒は斜面を転がるという条件より,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad (12)$$

となる.

- 6.11. 6.10 と同じように座標をとる. $t = 0$ のとき円筒から手を離したとする. この場合の初期条件は $\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$ とすれば,

$$v(0) = 0 \quad (1)$$

$$x(0) = 0 \quad (2)$$

となる. これらの条件を利用して 6.10 の式 (6) を時間 t について積分すれば,

$$v(t) = \frac{mg \sin \theta}{m + \frac{I}{a^2}} t \quad (3)$$

$$x(t) = \frac{mg \sin \theta}{2 \left(m + \frac{I}{a^2} \right)} t^2 \quad (4)$$

が求められる. この円筒が高さ h だけ斜面を下る間に, 重心の x 座標は $\frac{h}{\sin \theta}$ だけ移動する. この移動に要する時間は式 (4) に移動

距離を代入した,

$$\frac{mg \sin \theta}{2 \left(m + \frac{I}{a^2} \right)} t^2 = \frac{h}{\sin \theta} \quad (5)$$

を解くことによって求められ,

$$t^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{2h}{g} \frac{m + \frac{I}{a^2}}{m} \right) \quad (6)$$

$$t = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{m + \frac{I}{a^2}}{m}} \quad (7)$$

である. また, 高さ h だけ斜面を下ったときの円筒の重心の x 軸方向速度は,

$$v(0) = \sqrt{2gh \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}}} \quad (8)$$

となる. よって, このときの運動エネルギーは

$$\text{剛体の回転: } \frac{1}{2} I \phi^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{1}{a} \sqrt{2gh \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}}} \right)^2 = \frac{Igh}{a^2} \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}} \quad (9)$$

$$\text{重心の並進: } \frac{1}{2} m v^2 = mgh \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}} \quad (10)$$

の和であるので,

$$\begin{aligned} \frac{Igh}{a^2} \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}} + mgh \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}} &= mgh \frac{\frac{I}{a^2}}{m + \frac{I}{a^2}} + mgh \frac{m}{m + \frac{I}{a^2}} \\ &= mgh \frac{\frac{I}{a^2} + m}{m + \frac{I}{a^2}} = mgh \quad (11) \end{aligned}$$

となる. つまり, 落下の際に失った位置エネルギー (重力ポテンシャルエネルギー) に等しい. また, この結果は慣性モーメント I の結果によらずに成り立つので, 円筒に限らずに成立する.

【発展問題】

6.12. 質点の落下する加速度を a_0 とし, 糸の張力をそれぞれ T_1 , T_2 とする. このときの各質点の運動方程式は,

$$m_1 a_0 = T_1 - m_1 g \quad (1)$$

$$m_2 a_0 = m_2 g - T_2 \quad (2)$$

である。また、滑車の慣性モーメントを I としたときの回転の運動方程式は、

$$I \frac{d\omega}{dt} = T_2 a - T_1 a \quad (3)$$

であり、変形すると、

$$\frac{I}{a} \frac{d\omega}{dt} = T_2 - T_1 \quad (4)$$

となる。ここで ω は滑車の角速度であり、

$$a_0 = a \frac{d\omega}{dt} \quad (5)$$

を満たしている。したがって、(1) + (2) + (4) より、

$$(m_1 + m_2) a_0 + \frac{I}{a} \frac{d\omega}{dt} = (m_2 - m_1) g \quad (6)$$

となる。式 (6) に式 (5) を代入すると、

$$(m_1 + m_2) a_0 + \frac{I}{a^2} a_0 = (m_2 - m_1) g \quad (7)$$

となる。これを解くと、

$$a_0 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}} g \quad (8)$$

質点の落下する加速度 a_0 を得る。

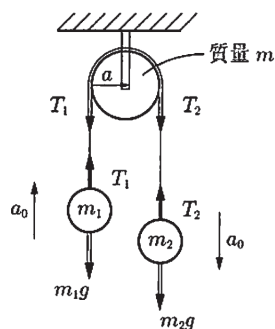
滑車の慣性モーメントを無視した場合には、式 (8) に $I = 0$ を代入すればよいので、

$$a_0 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (9)$$

となる。つまり $I \neq 0$ の場合には、滑車の回転にも質点を持っている位置エネルギー（重力ポテンシャルエネルギー）が利用されるため、 $I = 0$ の場合と比較をすると、質点の落下する加速度 a_0 は小さくなる。

- 6.13. 鉛直方向のみを考え、鉛直方向下向きを正にとる。 g を重力加速度、 a を物体の落下の加速度、 T を張力とすると、質量 m_1 の物体の運動方程式は、

$$m_1 a = m_1 g - T \quad (1)$$



である。また、滑車の回転の運動方程式は、

$$I \frac{d\omega}{dt} = RT \quad (2)$$

であり、変形すると、

$$\frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt} = T \quad (3)$$

となる。ここで、滑車の回転の角速度は $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ であり、

$$a = R \frac{d\omega}{dt} \quad (4)$$

を満たしている。式 (1)、式 (2) より、

$$m_1 a = m_1 g - \frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt} \quad (5)$$

となる。式 (5) に式 (4) を代入すると、

$$m_1 a = m_1 g - \frac{I}{R^2} a \quad (6)$$

となる。式 (6) を物体の落下の加速度 a について解くと、

$$a = g \frac{1}{1 + \left(\frac{I}{m_1 R^2} \right)} = \frac{m_1 R^2}{m_1 R^2 + I} g \quad (7)$$

を得る。

6.14. 物体は等速円運動しているので、

$$\text{質点の角運動量} \quad L = m r_0^2 \omega$$

$$\text{質点の回転エネルギー} \quad E_R = \frac{1}{2} m r_0^2 \omega^2$$

今回の条件における棒の角運動量は問題 6.6. より $\frac{1}{3} m l^2$ であるので、

$$\text{棒の角運動量} \quad L = \frac{1}{3} m r_0^2 \omega$$

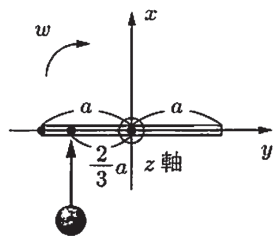
$$\text{棒の回転エネルギー} \quad E_R = \frac{1}{6} m r_0^2 \omega^2$$

6.15. 衝突時に薄板とボールにはたらく力を F とすると、衝突をしている間の運動方程式は

$$\text{薄板の回転:} \quad I \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3} a F \quad (1)$$

$$\text{ボールの並進:} \quad m \frac{dv}{dt} = -F \quad (2)$$

ここで、 I は薄板の慣性モーメント、 ω は薄板の回転の角速度、 v はボールの速度である。なお、 F は定数ではなく変数である。式



(板を上から見た図)

(1), 式 (2) より,

$$\frac{3}{2} \frac{I}{a} \frac{d\omega}{dt} + m \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3)$$

を得る. 衝突前後のボールの速度を v_0 , v_0' , 衝突後の薄板の角速度を ω_1' とすれば, 式 (3) を時間 t について積分した式より,

$$\frac{3}{2} \frac{I}{a} \omega_1' + m v_0' = m v_0 \quad (4)$$

また, 弾性衝突なので, 衝突前後で運動エネルギーが保存されるため,

$$\frac{1}{2} I \omega_1'^2 + \frac{1}{2} m v_0'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (5)$$

である. 式 (4), 式 (5) より, v_0' を消去すると,

$$\frac{1}{2} I \omega_1'^2 + \frac{1}{2} m \left(v_0 - \frac{3}{2} \frac{I}{ma} \omega_1' \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} I \omega_1'^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{3}{2} \frac{I}{a} v_0 \omega_1' + \frac{9}{8} \frac{I^2}{ma^2} \omega_1'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{2} I + \frac{9}{8} \frac{I^2}{ma^2} \right) \omega_1' = \frac{3}{2} \frac{I}{a} v_0 \quad (8)$$

$$\omega_1' = \frac{\frac{3}{2} \frac{I}{a} v_0}{\frac{1}{2} I + \frac{9}{8} \frac{I^2}{ma^2}} \quad (9)$$

を得る. また, 式 (9) を式 (4) に代入すると,

$$v_0' = v_0 - \frac{3}{2} \frac{I}{ma} \omega_1' \quad (10)$$

を得る. ここで, 薄板の慣性モーメント I は例題 6.8 より,

$$I = \frac{1}{12} m_0 (2a)^2 = \frac{1}{3} m_0 a^2 \quad (11)$$

であるので, 式 (11) を式 (9), 式 (10) に代入して,

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \frac{\frac{3}{2} \frac{1}{a} v_0 \times \frac{1}{3} m_0 a^2}{\frac{1}{6} m_0 a^2 + \frac{9}{8} \frac{1}{ma^2} \times \frac{1}{9} m_0^2 a^4} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v_0 a}{\frac{1}{6} m_0 a^2 + \frac{1}{8} \frac{m_0}{m} a^2} \\ &= \frac{v_0}{a} \frac{12m}{4m + 3m_0} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v_0' &= v_0 - \frac{3}{2} \frac{1}{ma} \omega_1' \times \frac{1}{3} m_0 a^2 \times \frac{v_0}{a} \frac{12m}{4m + 3m_0} \\ &= v_0 - v_0 \frac{6m_0}{4m + 3m_0} = v_0 \frac{4m - 3m_0}{4m + 3m_0} \end{aligned} \quad (13)$$

となる. これが, 衝突直後の薄板の角速度とボールの速度になる.

衝突後は, 薄板とボールには水平方向の力ははたらかないので, ともにそのままの角速度と速度で, 等角速度運動と等速度運動をそれぞれ行う.